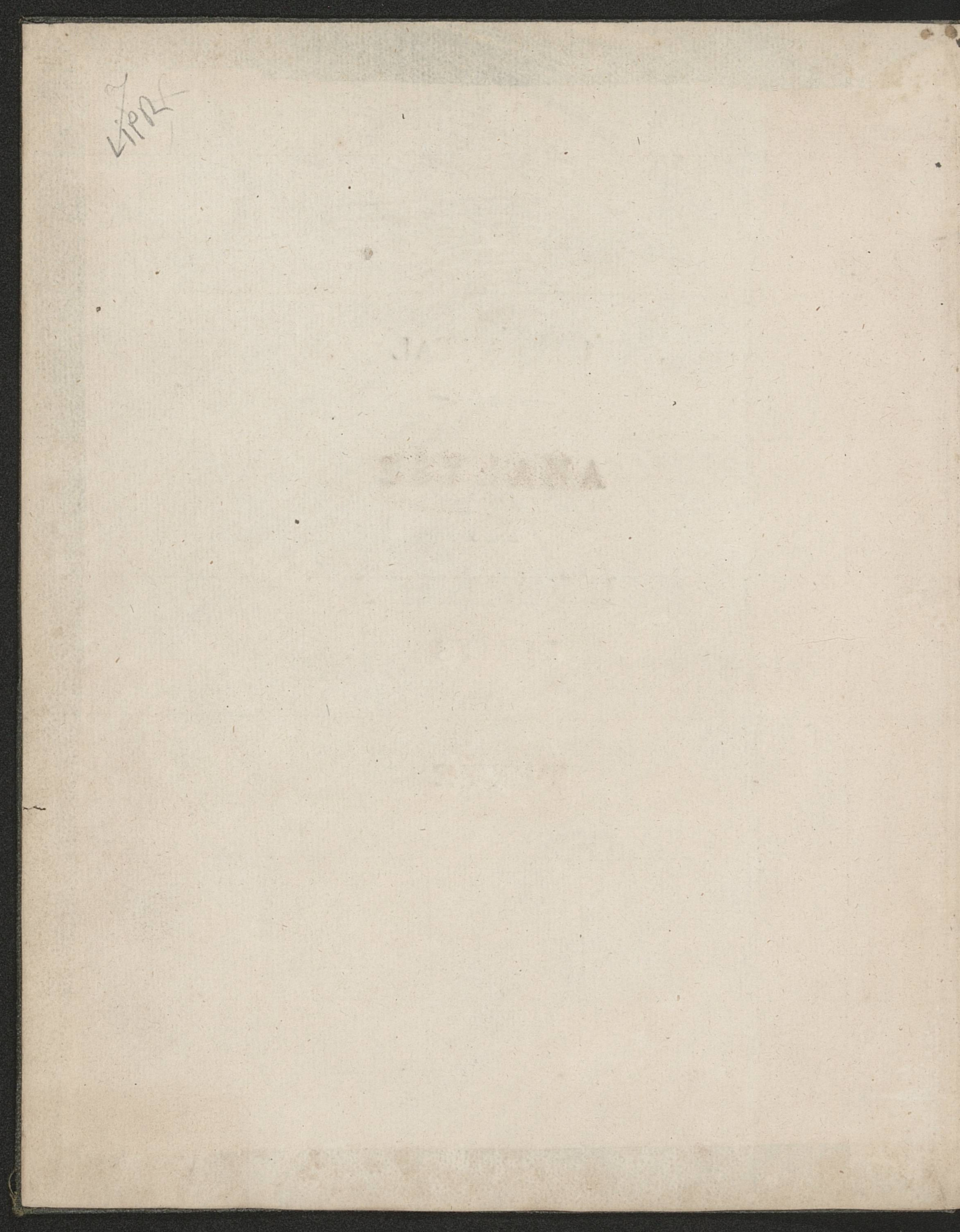
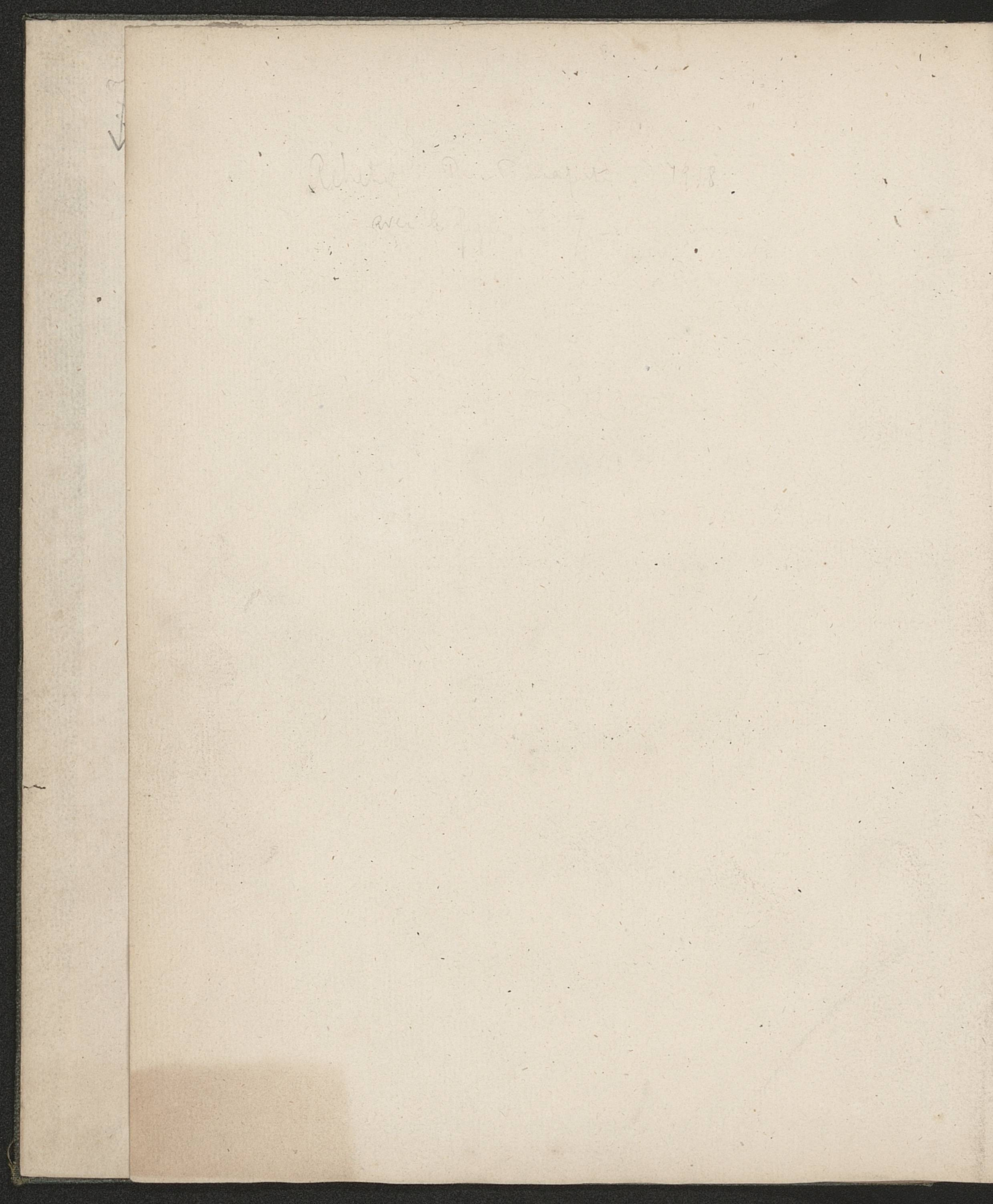
L'HOSPITAL

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS

TEXTE







1918

avec le

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR L'INTELLIGENCE
DES LIGNES COURBES.

PAR M. LE MARQUIS DE L'HOSPITAL.

NOUVELLE ÉDITION,

Revue & augmentée par M. LE FEVRE.

Prix 12 liv. relié.



A PARIS,

Chez ALEX. JOMBERT, jeune, Libraire pour le Génie & l'Artillerie, rue Dauphine, près du Pont Neuf.

M. DCC. LXXXI. [1781]

Avec Approbation, & Privilege du Roi.

On trouve chez le même Libraire les *Sections Coniques* du même Auteur, *in*-4°.

Prix relié 12 *liv*.



A MESSIEURS
LES LECTEURS
ET PROFESSEURS ROYAUX.

MESSIEURS,

Je vous dois beaucoup, & j'ose le dire ; vous m'avez conduit sur les pas de la vérité ; sans vous j'aurois erré long-temps. L'obscurité répandue le plus souvent sur les principes qui servent de base à une science, la confusion des idées qui accompagne les premiers essais dans tous les genres d'étude, la difficulté de remédier soi-même à ce désordre, & bientôt après la foule des livres inutiles, sont autant d'entraves qui, dans la carriere des sciences, rendent la marche pénible & quelquefois rebutante. Vous avez levé tous ces obstacles devant moi ; vous avez rassuré mon imagination en éclairant les fondements sur lesquels je devois bâtir ; &, en m'apprenant à puiser dans les vraies sources, vous m'avez sauvé de la perte du temps & de l'ennui des livres, plus nuisible lui seul à l'instruction, que toutes les autres difficultés ensemble. Enfin, dans plus d'un genre, vous m'avez mené par la main jusqu'aux bornes

où finissent nos connoissances ; & delà j'ai contemplé avec vous la lice immense où doivent entrer un jour ceux qui vous suivront. Dans cette marche vigoureuse, mes idées qui se sont étendues en se multipliant, se sont aussi placées d'elles-mêmes avec ordre sur les rameaux d'une tige unique. J'ai connu l'art heureux de lier un grand nombre de rapports dans une vue générale ; j'en ai senti la nécessité; & vous m'avez montré comment, par le développement de ces rapports, on arrive au fond du labyrinthe où la vérité s'enferme.

C'est dans les Sciences Mathématiques en particulier, que vous m'avez exercé, MESSIEURS; *croiroit-on que dans ces sciences même les principes peuvent n'être pas présentés d'une maniere exacte ? C'est pour les rectifier dans l'Analyse des infiniment petits, que j'ai joint quelques notes à l'édition de cet Ouvrage que j'ai l'honneur de vous présenter. Ce livre, excellent dans le temps où il a paru, n'a pas cessé d'être précieux. Le nombre des applications qu'il présente, l'ordre, la maniere générale, qui regnent dans tout l'Ouvrage, en feront long-temps un de nos bons livres élémentaires. Cependant il est devenu insuffisant par l'avancement de la Géométrie ; il manque de quelques théories nécessaires à l'intelligence complette des matieres qu'il discute. J'ai suppléé dans des notes, & les théories qui lui sont nécessaires, & celles dont un livre élementaire ne peut plus se passer aujourd'hui ; j'ai tâché d'expliquer aussi clairement, & en aussi peu de mots que j'ai pu, les vrais principes du calcul différentiel : ensorte*

que je crois pouvoir regarder le livre des Infiniment Petits, avec les additions que j'ai faites, comme une bonne introduction aux Ouvrages plus profonds que vous nous expliquez. Mais de tous les détails où je suis entré, rien ne m'appartient, MESSIEURS*; je les ai puisés dans vos leçons : je n'ai que le mérite aisé d'avoir recueilli les matieres, & de les avoir mises en ordre.*

Quand l'étude des Mathématiques n'auroit point d'autre avantage que de donner à l'esprit de l'étendue, de la justesse, de l'ordre, & de l'accoutumer aux méditations profondes, c'en seroit assez pour la rendre recommandable. Mais en outre, elle est d'une nécessité absolue dans la plupart des recherches physiques, dans cette science, par exemple, qu'on doit regarder comme le dernier effort de l'esprit humain, l'Astronomie physique. Les progrès qu'elle a faits de nos jours, ne sont-ils pas dus aux travaux des grands Géometres qui ont reculé si loin les bornes de la Géométrie transcendante. C'est de l'Astronomie physique, sur-tout, qu'on doit affirmer le mot de Platon : Que nul n'entre ici qu'il ne soit Géometre. *Mais qu'il faut de pénétration & d'adresse pour descendre des contemplations générales aux applications particulieres ! On marche sur un sable mouvant qui semble fuir sous les pieds ; à tout moment on court risque de se perdre. C'est alors qu'on a besoin de Maîtres, & de Maîtres profondément versés dans la science, & qui ne soient pas arrêtés par l'ennui de revenir sur des choses connues.*

Ce n'eſt pas ſeulement dans l'étude de la Géométrie ſublime, que l'on trouve des ſecours auprès de vous, MESSIEURS : *l'étude des langues, qui eſt la clef de toutes les ſciences, la connoiſſance approfondie des chefs-d'œuvre tant anciens que modernes, la Morale, la Phyſique, l'Hiſtoire civile & naturelle, vous embraſſez tous les genres de ſcience ; vous en rendez l'abord agréable & facile, en même temps que vous les approfondiſſez. Oui,* MESSIEURS, *je ne crains pas de le dire, puiſque ma voix n'eſt que l'écho du petit nombre de ceux qui aiment les Lettres, oui la Philoſophie & les Beaux-Arts trouvent ici des hommes qui les enrichiſſent de leurs travaux ; le Public y trouve des Maîtres empreſſés ; & les Savants, des Modeles & des Amis.*

Je ſuis, avec un profond reſpect,

MESSIEURS,

Votre très humble & très obéiſſant ſerviteur, LE FEVRE.

PRÉFACE.

L'ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage, ſuppoſe la commune ; mais elle en eſt fort différente. L'Analyſe ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénetre juſques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : & par-là elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits ſont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyſe s'étend au-delà de l'infini : car elle ne ſe borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troiſiemes, quatriemes, & ainſi de ſuite, ſans trouver jamais de terme qui la puiſſe arrêter. De ſorte qu'elle n'embraſſe pas ſeulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis (1).

Une Analyſe de cette nature pouvoit ſeule nous

(1) Je ne ſais pas ſi l'Auteur avoit une idée nette de tous ces infinis ; quoi qu'il en ſoit, cette métaphyſique eſt totalement inutile au calcul différentiel, qu'on peut établir ſur des principes plus évidents, comme on le verra dans les notes que nous avons ajoutées à cet Ouvrage. (Le Fevre)

conduire juſqu'aux véritables principes des lignes courbes. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entre elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entre eux; il n'appartient qu'à l'Analyſe des infiniment petits de déterminer la poſition de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'eſt-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'inflexion ou de rebrouſſement, les rayons qui s'y réfléchiſſent, ceux qui s'y rompent, &c.

Les polygones inſcrits ou circonſcrits aux courbes, qui, par la multiplication infinie de leurs côtés, ſe confondent enfin avec elles, ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'eſt que depuis la découverte de l'Analyſe dont il s'agit ici, que l'on a bien ſenti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des Anciens ſur ces matieres, principalement d'*Archimede*, eſt aſſurément digne d'admiration. Mais outre qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légérement; ce ne ſont preſque par-tout que propoſitions particulieres & ſans ordre, qui ne font appercevoir aucune méthode réguliere & ſuivie. Ce n'eſt pas cependant

cependant qu'on leur en puiſſe faire un reproche légitime : ils ont eu beſoin d'une extrême force de génie (1) pour percer à travers tant d'obſcurités, & pour entrer les premiers dans des pays entiérement inconnus. S'ils n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits ; du moins, quoi qu'en diſe (2) *Viette*, ils ne ſe ſont point égarés : & plus les chemins qu'ils ont tenus étoient difficiles & épineux, plus ils ſont admirables de ne s'y être pas perdus. En un mot, il ne paroît pas que les Anciens en aient pu faire davantage pour leur temps : ils ont fait ce que nos bons eſprits auroient fait en leur place ; & s'ils étoient à la nôtre, il eſt à croire qu'ils auroient les mêmes vues que nous. Tout cela eſt une ſuite de l'égalité naturelle des eſprits & de la ſucceſſion néceſſaire des découvertes.

Ainſi il n'eſt pas ſurprenant que les Anciens n'aient pas été plus loin ; mais on ne ſauroit aſſez s'étonner

---

(1) *Archimedis de lineis ſpiralibus tractatum cum bis terque legiſſem, totaſque animi vires intendiſſem, ut ſubtiliſſimarum demonſtrationum de ſpiralium tangentibus artificium adſequerer ; nuſquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certus receſſi, quin ſcrupulus animo ſemper hæreret, vim illius demonſtrationis me non percepiſſe totam, &c.* Bullialdus, Præf. de lineis ſpiralibus.

(2) *Si verè Archimedes, fallaciter concluſit Euclides, &c.* Supplem. Geomet.

que de grands hommes, & sans doute d'aussi grands hommes que les Anciens, en soient si long-temps demeurés là ; & que par une admiration presque superstitieuse pour leurs ouvrages, ils se soient contentés de les lire & de les commenter, sans se permetre d'autre usage de leurs lumieres, que ce qu'il en falloit pour les suivre ; sans oser commettre le crime de penser quelquefois par eux-mêmes, & de porter la vue au-delà de ce que les Anciens avoient découvert. De cette maniere, bien des gens travailloient, ils écrivoient, les livres se multiplioient, & cependant rien n'avançoit : tous les travaux de plusieurs siecles n'ont abouti qu'à remplir le monde de respectueux commentaires & de traductions répétées d'originaux souvent assez méprisables.

Tel fut l'état des Mathématiques, & sur-tout de la Philosophie, jusqu'à M. *Descartes*. Ce grand homme, poussé par son génie & par la supériorité qu'il se sentoit, quitta les Anciens pour ne suivre que cette même raison que les Anciens avoient suivie ; & cette heureuse hardiesse, qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de vues nouvelles & utiles sur la Physique & sur la Géométrie. Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'avisa de penser.

Pour ne parler que des Mathématiques, dont il est

ſeulement ici queſtion, M. *Deſcartes* commença où les Anciens avoient fini, & il débuta par la ſolution d'un Problême où *Pappus* dit (1) qu'ils étoient tous demeurés. On ſait juſqu'où il a porté l'Analyſe & la Géométrie, & combien l'alliage qu'il en a fait rend facile la ſolution d'une infinité de Problêmes qui paroiſſoient impénétrables avant lui. Mais comme il s'appliquoit principalement à la réſolution des égalités, il ne fit d'attention aux courbes qu'autant qu'elles lui pouvoient ſervir à en trouver les racines : de ſorte que l'Analyſe ordinaire lui ſuffiſant pour cela, il ne s'aviſa point d'en chercher d'autre. Il n'a pourtant pas laiſſé de s'en ſervir heureuſement dans la recherche des tangentes ; & la méthode qu'il découvrit pour cela, lui parut ſi belle, qu'il ne fit point de difficulté de dire (2), que *ce Problême étoit le plus utile & le plus général, non ſeulement qu'il ſût, mais même qu'il eût jamais deſiré de ſavoir en Géométrie.*

Comme la Géométrie de M. *Deſcartes* avoit mis la conſtruction des Problêmes par la réſolution des égalités fort à la mode, & qu'elle avoit donné de grandes ouvertures pour cela ; la plupart des Géome-

(1) *Collect. Mathem. Lib. 7. initio.*

(2) Géométrie, liv. 2.

tres s'y appliquerent; ils y firent aussi de nouvelles découvertes, qui s'augmentent & se perfectionnent encore tous les jours.

Pour M. *Paschal*, il tourna ses vues de tout un autre côté : il examina les courbes en elles-mêmes, & sous la forme de polygone; il rechercha les longueurs de quelques-unes, l'espace qu'elles renferment, le solide que ces espaces décrivent, les centres de gravité des unes & des autres, &c. Et, par la considération seule de leurs éléments, c'est-à-dire des infiniment petits, il découvrit des méthodes générales & d'autant plus surprenantes, qu'il ne paroît y être arrivé qu'à force de tête & sans analyse.

Peu de temps après la publication de la Méthode de M. *Descartes* pour les tangentes, M. *de Fermat* en trouva aussi une, que M. *Descartes* a enfin avoué (1) lui-même être plus simple en bien des rencontres que la sienne. Il est pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. *Barrow* l'a rendue depuis en considérant de plus près la nature des polygones, qui présente naturellement à l'esprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces

(1) Lettre 71, Tome 3.

deux appliquées, & de celle des coupées correſpondantes; & ce triangle eſt ſemblable à celui qui ſe doit former de la tangente, de l'appliquée, & de la ſoutangente: de ſorte que par une ſimple Analogie cette derniere méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. *Deſcartes*, & que cette méthode, elle-même, demandoit auparavant.

M. *Barrow* (1) n'en demeura pas là, il inventa auſſi une eſpece de calcul propre à cette méthode; mais il lui falloit, auſſi-bien que dans celle de M. *Deſcartes*, ôter les fractions, & faire évanouir tous les ſignes radicaux, pour s'en ſervir.

Au défaut de ce calcul eſt ſurvenu celui du célebre (2) M. *Leibnitz*; & ce Savant Géometre a commencé où M. *Barrow* & les autres avoient fini. Son calcul l'a mené dans des pays juſqu'ici inconnus; & il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. MM. *Bernoulli* ont été les premiers qui ſe ſont apperçus de la beauté de ce calcul: ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de ſurmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais oſé tenter auparavant.

L'étendue de ce calcul eſt immenſe: il convient

---

1) *Lect. Geomet. p.* 80.

(2) *Acta Erud. Lipſ. an.* 1684, *p.* 467.

aux courbes mécaniques, comme aux géométriques; les ſignes radicaux lui ſont indifférents & même ſouvent commodes; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra; la comparaiſon des infiniment petits de tous les genres lui eſt également facile. Et delà naiſſent une infinité de découvertes ſurprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux queſtions *de maximis & minimis*, aux points d'inflexion & de rebrouſſement des courbes, aux développées, aux cauſtiques par réflexion ou par réfraction, &c. comme on le verra dans cet ouvrage.

Je le diviſe en dix Sections. La premiere contient les principes du calcul des différences. La ſeconde fait voir de quelle maniere l'on s'en doit ſervir pour trouver les tangentes de toutes ſortes de courbes, quelque nombre d'indéterminées qu'il y ait dans l'équation qui les exprime, quoique M. *Craige* (1) n'ait pas cru qu'il pût s'étendre juſqu'aux courbes mécaniques ou tranſcendantes. La troiſieme, comment il ſert à réſoudre toutes les queſtions *de maximis & minimis*. La quatrieme, comment il donne les points d'inflexion & de rebrouſſement des courbes. La cin-

(1) *De figurarum curvilinearum quadraturis*, *part.* 2.

quieme en découvre l'uſage pour trouver les développées de M. *Huygens*, dans toutes ſortes de courbes. La ſixieme & la ſeptieme font voir comment il donne les cauſtiques, tant par réflexion que par réfraction, dont l'illuſtre M. *Tſchirnhaus* eſt l'inventeur, & pour toutes ſortes de courbes encore. La huitieme en fait voir encore l'uſage pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de poſition, droites ou courbes. La neuvieme contient la ſolution de quelques Problêmes qui dépendent des découvertes précédentes. Et la dixieme conſiſte dans une nouvelle maniere de ſe ſervir du calcul des différences pour les courbes géométriques : d'où l'on déduit la Méthode de MM. *Deſcartes* & *Hudde*, laquelle ne convient qu'à ces ſortes de courbes.

Il eſt à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que très peu de propoſitions ; mais elles ſont toutes générales, & comme autant de Méthodes dont il eſt aiſé de faire l'application à tant de propoſitions particulieres qu'on voudra : je la fais ſeulement ſur quelques exemples choiſis, perſuadé qu'en fait de Mathématique il n'y a à profiter que dans les méthodes, & que les livres qui ne conſiſtent qu'en détails ou en propoſitions particulieres, ne ſont bons qu'à faire perdre du temps à ceux qui les font & à

ceux qui les lisent. Aussi n'ai-je ajouté les Problêmes de la Section neuvieme, que parcequ'ils passent pour curieux & qu'ils sont très universels. Dans la dixieme Section ce ne sont encore que des Méthodes que le calcul des différences donne à la maniere de MM. *Descartes* & *Hudde ;* & si elles sont si limitées, on voit par toutes les précédentes que ce n'est pas un défaut de ce calcul, mais de la Méthode Cartésienne à laquelle on l'assujetit. Au contraire rien ne prouve mieux l'usage immense de ce calcul, que toute cette variété de méthodes ; & pour peu d'attention qu'on y fasse, l'on verra qu'il tire tout ce qu'on peut tirer de celle de MM. *Descartes* & *Hudde*, & que la preuve universelle qu'il donne de l'usage qu'on y fait des progressions arithmétiques, ne laisse plus rien à souhaiter pour l'infaillibilité de cette derniere Méthode.

J'avois dessein d'y ajouter encore une Section pour faire sentir aussi le merveilleux usage de ce calcul dans la Physique, jusqu'à quel point de précision il la peut porter, & combien les Méchaniques en peuvent retirer d'utilité. Mais une maladie m'en a empêché : le public n'y perdra pourtant rien, & il l'aura quelque jour même avec usure.

Dans tout cela il n'y a encore que la premiere partie

tie du calcul de M. *Leibnitz*, laquelle consiste à descendre des grandeurs entieres à leurs différences infiniment petites, & à comparer entre eux ces infiniment petits de quelque genre qu'ils soient : c'est ce qu'on appelle *Calcul différentiel*. Pour l'autre partie, qu'on appelle *Calcul intégral*, & qui consiste à remonter de ces infiniment petits aux grandeurs ou aux touts dont ils sont les différences, c'est-à-dire à en trouver les sommes, j'avois aussi dessein de le donner. Mais M. *Leibnitz* m'ayant écrit qu'il y travailloit dans un Traité qu'il intitule *De Scientia infiniti*, je n'ai eu garde de priver le public d'un si bel Ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il y a de plus curieux pour la Méthode inverse des tangentes, pour les rectifications des courbes, pour la quadrature des espaces qu'elles renferment, pour celle des surfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimension de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &c. Je ne rends même ceci public, que parcequ'il m'en a prié par ses lettres, & que je le crois nécessaire pour préparer les esprits à comprendre tout ce qu'on pourra découvrir dans la suite sur ces matieres.

Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de MM. *Bernoulli*, sur-tout à celles du jeune,

présentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnitz*. C'est pourquoi je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser.

C'est encore une justice due au savant M. *Newton*, & que M. *Leibnitz* lui a rendue (1) lui-même : Qu'il avoit aussi trouvé quelque chose de semblable au calcul differentiel, comme il paroît par l'excellent Livre intitulé *Philosophiæ naturalis principia Mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel est presque tout de ce calcul. Mais la caractéristique de M. *Leibnitz* rend le sien beaucoup plus facile & plus expéditif ; outre qu'elle est d'un secours merveilleux en bien des rencontres (2).

Comme on imprimoit la derniere feuille de ce Traité, le Livre de M. *Nieuwentit* m'est tombé entre les mains. Son titre, *Analysis infinitorum*, m'a donné la curiosité de le parcourir : mais j'ai trouvé qu'il étoit fort different de celui-ci ; car outre que cet Auteur ne se sert point de la caractéristique de

(1) Journal des Savants du 30 Août 1694.

(2) Leibnitz, comme notre Auteur le dit lui-même, publia en 1684 le Calcul differentiel dans les Actes de Leipsick ; mais Newton avoit trouvé dès 1664 le calcul des fluxions, qui ne differe de l'autre que par la caractéristique.

M. *Leibnitz*, il rejette absolument les différences secondes, troisiemes, &c. Comme j'ai bâti la meilleure partie de cet Ouvrage sur ce fondement, je me croirois obligé de répondre à ses objections, & de faire voir combien elles sont peu solides, si M. *Leibnitz* n'y avoit déjà pleinement satisfait dans les Actes(1) de Leipsick (2). D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pu démontrer facilement à la maniere des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà connues, & de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles.

---

(1) *Acta Erud. an.* 1695, *p.* 310 & 369.

(2) Nieuwentit ne faisoit pas attention que si l'on pouvoit concevoir dans le cercle une corde infiniment petite du premier ordre, l'abcisse ou sinus verse correspondant seroit infiniment petit du second : & que si la courbe étoit infiniment petite du second, l'abcisse seroit infiniment petite du quatrieme, &c.; puisque le diametre qui est fini est toujours à la corde, comme la corde est à l'abcisse correspondante.



TABLE.

SECTION I. *OU l'on donne les Regles du calcul des Différences*, page 1

SECT. II. *Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes*, 24

SECT. III. *Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions* De maximis & minimis, 65

SECT. IV. *Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement*, 83

SECT. V. *Usage du calcul des différences pour trouver les développées*, 105

SECT. VI. *Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réflexion*, 143

SECT. VII. *Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfraction*, 160

SECT. VIII. *Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes*, 172

SECT. IX. *Solution de quelques Problêmes qui dépendent des méthodes précédentes*, 186

SECT. X. *Nouvelle maniere de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de MM.* Descartes & Hudde, 216

ANALYSE

ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL DES DIFFÉRENCES.

SECTION PREMIERE

Où l'on donne les regles de ce calcul.

DÉFINITION I.

On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement; &, au contraire, quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi, dans une parabole, les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite, dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour Fig. 1.

une de ses appliquées la droite PM; & soit une autre appliquée pm infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene MR parallele à AC; les cordes AM, Am; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM, le petit arc de cercle MS; Pp sera la différence de AP, Rm celle de PM, Sm celle de AM, & Mm celle de l'arc AM. De même le petit triangle MAm qui a pour base l'arc Mm, sera la différence du segment AM; & le petit espace $MPpm$, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.

COROLLAIRE.

1. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zéro : ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre ; &, pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme, par exemple, les variables* AP, x; PM, y; AM, z; *l'arc* AM, u; *l'espace mixtiligne* APM, s; *& le segment* AM, t; dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, *&* dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne different entre elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande,

par exemple, qu'on puiſſe prendre *Ap* pour *AP*, *pm* pour *PM*, l'eſpace *Apm* pour l'eſpace *APM*, le petit eſpace *MPpm* pour le petit rectangle *MPpR*, le petit ſecteur *AMm* pour le petit triangle *AMS*, l'angle *pAm* pour l'angle *PAM*, &c.

II. Demande ou Supposition.

3. On demande qu'une ligne courbe puiſſe être conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui eſt la même choſe) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, leſquels déterminent, par les angles qu'ils font entre eux, la courbure de la ligne. On demande, par exemple, que la portion de courbe *Mm* & l'arc de cercle *MS* puiſſent être conſidérés comme des lignes droites, à cauſe de leur infinie petiteſſe, en ſorte que le petit triangle *mSM* puiſſe être cenſé rectiligne.

Avertissement.

On ſuppoſe ordinairement dans la ſuite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables ; &, au contraire, que les premieres*, a, b, c, *&c. marquent des quantités conſtantes : de ſorte que* x *devenant* x + dx, y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* * *Et* a, b, c, *&c. demeurent les mêmes* a, b, c, *&c.* * Art. 1.

Proposition I.

Problême.

4. *Prendre la différence de pluſieurs quantités ajoutées enſemble, ou ſouſtraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$, dont il faut prendre la différence. Si l'on ſuppoſe que *x* ſoit augmentée d'une portion infiniment petite ; c'eſt-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; *y* deviendra alors $y + dy$; & *z*, $z + dz$; pour la conſtante *a*, * elle * *Art.* 1.

demeurera la même a: de ſorte que la quantité propoſée $a+x+y-z$ deviendra $a+x+dx+y+dy-z-dz$; & ſa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, ſera $dx+dy-dz$. Il en eſt ainſi des autres; ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoutées ou ſouſtraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité propoſée, & retenant les mêmes ſignes, on en compoſera une autre quantité qui ſera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. *Prendre la différence d'un produit fait de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy eſt $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lorſque x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$ qui eſt le produit de $x+dx$ par $y+dy$; & ſa différence ſera $ydx+xdy+dxdy$, c'eſt-à-dire * $ydx+xdy$: puiſque $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car ſi l'on diviſe, par exemple, ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en eſt la différence, & par conſéquent infiniment moindre qu'elle. D'où il ſuit que la différence du produit de deux quantités eſt égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la ſeconde, plus au produit de la différence de la ſeconde par la premiere.

* Art. 2.

2°. La différence de xyz eſt $yzdx+xzdy+xydz$. Car, en conſidérant le produit xy comme une ſeule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de ſa différence $ydx+xdy$ par la ſeconde z (ce qui donne $yzdx+xzdy$) plus le produit de la différence dz

de la ſeconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz ſera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ eſt $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui ſe prouve comme dans le cas précédent, en regardant le produit xyz comme une ſeule quantité. Il en eſt ainſi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette regle.

REGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres, eſt égale à la ſomme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainſi la différence de ax eſt $xo + adx$, c'eſt-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ eſt $bdx - ydx - ady - xdy$.

PROPOSITION III.

Problême.

6. *Prendre la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ eſt $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car ſuppoſant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entre elles, ſoit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'enſuit que leur différence, c'eſt-à-dire leurs accroiſſements ou diminutions ſeront auſſi égales entre elles; & partant * on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z ſa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit &c.; d'où l'on forme cette regle. * *Art.* 5.

REGLE III.

Pour les quantités diviſées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque eſt égale au produit

de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

7. *Prendre la différence d'une puissance quelconque, parfaite ou imparfaite, d'une quantité variable.*

Il est nécessaire, afin de donner une regle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposants.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposants formeront une progression arithmétique.

Prog. géom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au-dessous de l'unité, & l'arithmétique au-dessous de zéro, les termes de celle-ci seront les exposants de ceux auxquels ils répondent dans l'autre. Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. géom. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, &c.
Prog. arith. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra, pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi $\sqrt{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expres-

ſions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, &c. ne ſignifient que la même choſe.

Prog. géom. $1, \sqrt{x}, x.\ 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x.\ 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x.$

Prog. arith. $0, \frac{1}{2}, \quad 1.\ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1.\ 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1.$

Prog. géom. $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}.$

Prog. arith. $-1, -\frac{3}{2}, -2.\ -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -2.\ -3, -\frac{7}{2}, -4.$

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ eſt moyenne géométrique entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{2}$ eſt moyenne arithmétique entre leurs expoſants zéro & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ eſt la premiere des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même auſſi $\frac{1}{3}$ eſt la premiere des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs expoſants zéro & 1 : & il en eſt ainſi des autres. Or il ſuit de la nature de ces deux progreſſions.

1°. Que la ſomme des expoſants de deux termes quelconques de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant du terme qui en eſt le produit. Ainſi x^{4+3} où x^7 eſt le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ eſt le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par lui-même, c'eſt-à-dire ſon quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 eſt le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'eſt-à-dire ſon cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ ou $x^{-\frac{4}{3}}$ eſt la quatrieme puiſſance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en eſt ainſi des autres puiſſances. D'où il eſt évident que le double, le triple, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion géométrique eſt l'expoſant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des expoſants de deux termes quelconques de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant du

quotient de la division de ces termes. Ainsi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=x^{-\frac{7}{12}}$ sera l'exposant du quotient de la division de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'est la même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviser $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différents cas.

Premier cas, lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de xx est $2xdx$, de x^3 est $3xxdx$, de x^4 est $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre chose que le produit de x par x, sa différence * sera $xdx+xdx$, c'est-à-dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre chose que le produit de x par x par x, sa différence * sera $xxdx+xxdx+xxdx$, c'est-à-dire $3xxdx$; & comme il en est ainsi des autres puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m sera $mx^{m-1}dx$.

* Art. 5.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}}=z$, & en élevant chaque membre à la puissance n, on aura $x^m=z^n$, & en prenant les différences, comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx=nz^{n-1}dz$, & $dz=\frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$ ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} sa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de

$x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ sera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$.

Ce qui donne cette regle générale.

REGLE IV.

Pour les puiſſances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, eſt égale au produit de l'expoſant de cette puiſſance, par cette même quantité élevée à une puiſſance moindre d'une unité, & multipliée par ſa différence.

Ainſi, ſi l'on ſuppoſe que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, ſoit poſitif, ſoit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m ſera toujours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay - xx$, c'eſt-à-dire de $\overline{ay-xx}^3$, eſt $3 \times \overline{ay-xx}^2 \times \overline{ady - 2xdx} = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy+yy}$ ou de $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ydx+xdy+2ydy}$, ou $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$.

Celle de $\sqrt{a^4+axyy}$ ou de $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, eſt $\frac{1}{2} \times \overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ayydx+2axydy}$, ou $\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$. Celle de $\sqrt[3]{ax+xx}$, ou de $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, eſt $\frac{1}{3} \times \overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}} \times \overline{adx+2xdx}$, ou $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}$.

La différence de $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}}$ $\times\overline{adx+2xdx+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$, ou $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$ $+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

* *Art.* 7. 6. La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette regle * & celle des fractions $\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}\times\sqrt{xy+yy}\frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}$.

REMARQUE.

Il est à propos de bien remarquer que l'on a toujours supposé en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y, z, &c. croissoient aussi ; c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'est pourquoi s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croissent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on suppose croître, & changer par conséquent les signes des termes où les différences de celles qui diminuent se rencontrent. Ainsi si l'on suppose que les x croissant, les y & les z diminuent, c'est-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la différence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée *, les signes des termes où dy & dz se rencontrent : ce qui donne $yzdx$ $-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.

* *Art.* 5.

NOTE PREMIERE.

Ces principes n'ont pas le degré d'évidence qui eſt le fondement de la certitude mathématique. Nous ferons enſorte d'en ſubſtituer de plus exacts dans les notes que nous nous propoſons d'ajouter à cet ouvrage.

1. La portion finie dont une quantité variable augmente ou diminue dans un temps donné, en eſt appellée la *différence finie.* On ſe ſervira dans la ſuite de la caractériſtique Δ pour marquer la différence finie d'une quantité variable ; pour déſigner, par exemple, la différence finie de x, on écrira Δx, qui ſera précédé du ſigne $+$ ou du ſigne $-$, ſelon que la variable ſera ſuppoſée croître ou décroître.

On ſuppoſe que toutes les variables croiſſent en même temps, & l'on demande la différence finie de $a + x + y - z$, où a eſt conſtant ? Cette quantité deviendra $a + x + \Delta x + y + \Delta y - z - \Delta z$; & la différence finie, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, ſera $\Delta x + \Delta y - \Delta z$.

On demande, dans la même hypotheſe, la différence finie de xy ? Cette quantité devient $(x + \Delta x)\,(y + \Delta y)$; en faiſant la multiplication indiquée, & retranchant xy du produit, on trouvera qu'elle a pour différence finie $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$.

On voit tout auſſi aiſément que, x croiſſant, la différence finie de x^m eſt $(x + \Delta x)^m - x^m$. On fera uſage de la formule de Newton pour développer le binome, & on trouvera pour la différence finie demandée :

$$m x^{m-1} \Delta x + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2} \Delta x^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-3} \Delta x^3 + \&c.$$

Lorſque m eſt un nombre entier poſitif, cette ſuite eſt finie, & renferme toutes les puiſſances ſucceſſives de la différence Δx depuis Δx juſqu'à Δx^m incluſivement. Si, par exemple, on ſuppoſoit $m = 3$, elle ſeroit $3x^2 \Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$.

Le rapport entre les variables x & y étant donné par l'équation
$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$,
on demande le rapport entre les différences finies de ces variables, que l'on ſuppoſe croître en même temps ? On trouvera que ce rapport eſt renfermé dans l'équation.

$a(x+\Delta x)^2 - ax^2 + b(x+\Delta x)(y+\Delta y) - bxy + c(y+\Delta y)^2 - cy^2$
$+ d(x+\Delta x) - dx + e(y+\Delta y) - ey = 0,$
qu'on réduira facilement à
$(2ax+by+d)\Delta x + (bx+2cy+e)\Delta y + a\Delta x^2 + b\Delta x\Delta y + c\Delta y^2 = 0.$

FIG. 1, pl. A. 2. Soit une ligne courbe XMZ, qui ait pour diametre la ligne AB, & pour une de ses ordonnées la droite PM; & soit pris de part & d'autre du point P des parties égales PP', $P'P''$, $P''P'''$, &c, $P'P$, $'P''P$, $''P'''P$, &c. Cela posé, ayant nommé AP, x, PM, y; y', y'', y''', &c. les ordonnées $P'M'$, $P''M''$, $P'''M'''$, &c. qui répondent aux abcisses $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, $x+3\Delta x$, &c.; $'y$, $''y$, $'''y$, &c. les ordonnées $'P'M$, $''P''M$, $'''P'''M$, &c. qui répondent aux abcisses $x-\Delta x$, $x-2\Delta x$, $x-3\Delta x$, &c.; si l'on suppose $y'-y=\Delta y$, on aura aussi
$y''-y'=\Delta y'$, $y'''-y''=\Delta y''$, $y^{IV}-y'''=\Delta y'''$, &c.
$y - 'y = \Delta 'y$, $'y - ''y = \Delta ''y$, $''y - '''y = \Delta '''y$, &c.
Il faut remarquer que diviser le diametre AB en parties égales, c'est supposer Δx constant.

3. Il est bien clair que $\Delta y' - \Delta y = \Delta(y'-y) = \Delta\Delta y$; c'est cette différence de la différence Δy qu'on appelle différence seconde de la variable y, & que nous désignerons plus simplement par $\Delta^2 y$. Donc $\Delta y'' - \Delta y' = \Delta^2 y'$, $\Delta y''' - \Delta y'' = \Delta^2 y''$, &c. On verra très aisément aussi que $\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^2(y'-y) = \Delta^2\Delta y$; pour désigner cette seconde différence de la différence Δy, qu'on appelle différence troisieme de la variable y, nous écrirons $\Delta^3 y$; comme nous désignerons celles des ordres supérieurs, & qu'on trouvera de la même maniere, par $\Delta^4 y$, $\Delta^5 y$, &c.

Les variables croissant, & la différence premiere de x étant constante, on demande les différences finies successives de xy? Nous avons trouvé pour la différence premiere $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$. En substituant dans cette expression $x+\Delta x$ à x, $y+\Delta y$ à y, & $\Delta y+\Delta^2 y$ à Δy, on aura $y\Delta x + x\Delta y + 3\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$; ôtant de cette quantité la différence premiere $y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$, il restera pour la différence seconde $2\Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y$. Il faudra substituer dans cette différence seconde $x+\Delta x$ à x, $\Delta y+\Delta^2 y$ à Δy, $\Delta^2 y+\Delta^3 y$ à $\Delta^2 y$, pour avoir la différence troisieme $3\Delta x\Delta^2 y + x\Delta^3 y + 3\Delta x\Delta^3 y$. Il ne sera pas plus difficile de trouver la différence qua-

trieme $4\Delta x \Delta^3 y + x\Delta^4 y + 4\Delta x \Delta^4 y$; la différence cinquieme $5\Delta x \Delta^4 y + x\Delta^5 y + 5\Delta x \Delta^5 y$; & ainſi de ſuite.

La différence premiere de x étant toujours conſtante, on propoſe de trouver les différences finies ſucceſſives de x^m? Puiſque la différence premiere eſt

$$mx^{m-1}\Delta x + m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}\Delta x^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^{m-3}\Delta x^3 + \&c.;$$

on aura pour la différence ſeconde

$$m\Delta x(\overline{x+\Delta x}^{\,m-1} - x^{m-1}) + m.\frac{m-1}{2}\Delta x^2(\overline{x+\Delta x}^{\,m-2} - x^{m-2})$$
$$+ m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\Delta x^3(\overline{x+\Delta x}^{\,m-3} - x^{m-3}) + \&c.;$$

ou, développant tous ces binomes,

$$m.\overline{m-1}.x^{m-2}\Delta x^2 + m.\overline{m-1}.\frac{m-2}{2}x^{m-3}\Delta x^3 + m.\overline{m-1}.\frac{m-2}{2}.\frac{m-3}{3}x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.;$$
$$+ m.\frac{m-1}{2}.\overline{m-2}.x^{m-3}\Delta x^3 + m.\frac{m-1}{2}.\overline{m-2}.\frac{m-3}{2}x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.$$
$$+ m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\overline{m-3}.x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.$$

ou même encore, en faiſant toutes les réductions néceſſaires,

$$m.\overline{m-1}.x^{m-2}\Delta x^2 + m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}\Delta x^3 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{2}.\frac{m-3}{3}7x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.$$

On trouvera de la même maniere pour la différence troiſieme

$$m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}\Delta x^3 + m.\frac{m-1}{2}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.3x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.;$$

pour la différence quatrieme

$$m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.x^{m-4}\Delta x^4 + \&c.;$$

& ainſi des autres. Si m eſt un nombre entier poſitif, on aura

$$1.2.3\ldots\ldots\ldots\overline{m-1}.m\Delta x^m$$

pour la différence de l'ordre m, &, comme on voit, cette différence eſt conſtante; c'eſt-à-dire que Δx étant conſtant, & m un nombre entier poſitif, la différence finie $m+1$ de x^m eſt nulle.

4. Nous aurions pu faire toute autre hypotheſe que de ſuppoſer Δx conſtant; comme, par exemple, que les Δy, $\Delta y'$, $\Delta y''$, &c. fuſſent égaux entre eux, ou, ce qui revient au même, que Δy fût conſtant: alors *XMZ* n'étant point une ligne droite, Δx auroit été variable, ou, ce FIG. 1, pl. A.

qui est la même chose, les portions PP', $P'P''$, &c. n'eussent point été égales entre elles. En effet, si l'on tire les cordes de deux arcs quelconques $'''M''M$, $''M'M$ & des paralleles $'''Mm$, $''Mm'$ au diametre AB, les deux triangles $'''Mm''M$, $''Mm''M$ seront parfaitement égaux, puisqu'on a en même temps $'''Mm = ''Mm'$ & $''Mm = 'Mm'$. Les deux cordes feront donc des angles égaux avec les paralleles $'''Mm$, $''Mm'$; ou, ce qui revient au même, elles ne feront qu'une seule & même ligne droite. Ainsi la ligne XMZ devra être telle que les cordes des arcs consécutifs MM', $M'M''$, &c. ne fassent entre elles qu'une seule & même droite; d'où l'on doit conclure que, dans l'hypothese que nous examinons, XMZ sera elle-même une ligne droite qui se confondra avec la précédente. On ne pourra donc supposer à la fois qu'une seule différence finie constante. Mais soit que l'on fasse varier uniformément une des variables, soit qu'on ne regarde aucune différence comme constante, on doit arriver de toutes les manieres au même résultat.

Pour le démontrer, supposons que la courbe XMZ ait pour équation $y = x^2$, & qu'on demande d'arriver de l'ordonnée PM à l'ordonnée $P''M''$ par deux différences consécutives. A cause de $P''M'' = y' + \Delta y'$ & de $y' = y + \Delta y$, on aura, dans toutes les hypotheses, $P''M'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$. Maintenant si l'on prend pour premiere hypothese que $P'M'$ divise PP'' en deux parties égales, en nommant Δx chacune de ces parties, on aura $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$, & parceque Δx est constant, $\Delta^2 y = 2\Delta x^2$; donc $P''M'' = x^2 + 4x\Delta x + 4\Delta x^2$. En prenant pour seconde hypothese que $M'P'$ divise PP'' en deux parties inégales δx & $\delta x'$, on aura $\Delta y = 2x\delta x + \delta x^2$, $\Delta^2 y = 2\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x \delta^2 x + \delta^2 x^2$, & par conséquent $P''M'' = x^2 + 4x\delta x + 4\delta x^2 + 2x\delta^2 x + 4\delta x\delta^2 x + \delta^2 x^2$. Les différences finies Δx & δx sont inégales, mais on doit avoir $\delta x + \delta x'$ ou $2\delta x + \delta^2 x = 2\Delta x$; or comme en substituant cette valeur de $2\Delta x$ dans la premiere expression de $P''M''$, on trouve l'autre; il est clair que des deux manieres nous sommes arrivés au même résultat : il en seroit de même de toute autre hypothese.

5. On tirera de la premiere suite d'équations du n°. 2, $y' = y + \Delta y$, $y'' = y' + \Delta y' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, $y''' = y'' + \Delta y'' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$, &c. Donc l'ordonnée qui répond à $x + \Delta x$ est

$y + \Delta y$; celle qui répond à $x + 2\Delta x$ est $y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, où les coefficiens numériques 1, 2, 1 sont les mêmes que dans la puissance seconde d'un binome; celle qui répond à $x + 3\Delta x$ est $y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y$, où les coefficiens numériques 1, 3, 3, 1 sont les mêmes que dans la puissance troisieme d'un binome; & ainsi de suite. Donc, en nommant Y l'ordonnée qui répond à $x + n\Delta x$, on aura

$$Y = y + n\Delta y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \Delta^2 y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \Delta^3 y + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \Delta^4 y + \&c.$$

6. La seconde suite d'équations du même n°, donne $v = \Delta{}'y + {}'y = \Delta{}'y + \Delta{}''y + {}''y = \Delta{}'y + \Delta{}''y + \Delta{}'''y + {}'''y$, &c, ou $y = \Delta({}'y + {}''y + {}'''y + \&c)$; donc une ordonnée quelconque PM est la différence de la somme de toutes les ordonnées qui précedent. On peut énoncer cette proposition en disant qu'une fonction quelconque de x est la différence de la somme de toutes celles que l'on trouveroit en mettant dans la premiere pour x successivement $x - \Delta x$, $x - 2\Delta x$, $x - 3\Delta x$, &c. Or l'espace $MPP'M'$ peut être considéré comme une certaine fonction de x, dans laquelle si l'on met pour x successivement $x - \Delta x$, $x - 2\Delta x$, $x - 3\Delta x$, &c., on aura les espaces qui précedent, ${}'M{}'PPM$, ${}''M{}''P{}'P{}'M$, ${}'''M{}'''P{}''P{}''M$, &c; donc $MPP'M'$ est la différence de la somme de tous ces espaces, ou de tel autre espace qu'on voudra $KHPM$.

Pour fixer davantage les idées, supposons que XMZ soit une ligne droite qui rencontre le diametre au point A, de maniere que $AH = a$, $HK = b$, & qui par conséquent ait pour équation $ay = bx$; alors l'espace $MPP'M'$ sera $y\Delta x + \frac{\Delta y \cdot \Delta x}{2} = \frac{bx\Delta x}{a} + \frac{b\Delta x^2}{2a}$. On trouvera tous ceux qui précedent en mettant dans ${}'y\Delta x + \frac{\Delta{}'y \cdot \Delta x}{2}$, ${}''y\Delta x + \frac{\Delta{}''y \cdot \Delta x}{2}$, ${}'''y\Delta x + \frac{\Delta{}'''y \cdot \Delta x}{2}$, &c. pour ${}'y, {}''y, {}'''y$, &c. leurs valeurs $\frac{b}{a}(x - \Delta x)$, $\frac{b}{a}(x - 2\Delta x)$, $\frac{b}{a}(x - 3\Delta x)$, &c., ce qui donnera $\frac{b}{a}\left(x\Delta x - \frac{\Delta x^2}{2}\right)$, $\frac{b}{a}\left(x\Delta x - \frac{3\Delta x^2}{2}\right)$, $\frac{b}{a}\left(x\Delta x - \frac{5\Delta x^2}{2}\right)$, &c.

On eût trouvé les mêmes choſes, ſi l'on eût mis dans $\frac{b}{a}\left(x\Delta x+\frac{\Delta x^2}{2}\right)$, valeur de $MPP'M'$, pour x ſucceſſivement $x-\Delta x$, $x-2\Delta x$, $x-3\Delta x$, &c. Il reſte à démontrer que ce dernier eſpace eſt la différence de la ſomme de tous ceux qui précedent. Cette ſomme eſt la ſurface du triangle qui a AP pour baſe, & PM pour hauteur, ſi, pour ſimplifier, on ſuppoſe les ordonnées perpendiculaires au diametre; c'eſt-à-dire que cette ſomme eſt $\frac{xy}{2}=\frac{bx^2}{2a}$, quantité qui a pour différence $\frac{b}{a}\left(x\Delta x+\frac{\Delta x^2}{2}\right)$.

On démontrera de la même maniere que MM' eſt la différence de tel autre arc qu'on voudra KM; que la ſurface décrite par MM', dans la révolution de la figure ſur l'axe AB, eſt la différence de la ſurface décrite par KM dans la même révolution; que le ſolide engendré par $MPP'M'$ eſt la différence du ſolide engendré par $KHPM$, &c; & toutes les propoſitions énoncées par notre Auteur dans ſa ſeconde définition, pourvu que par le mot *différence* on n'entende que *différence finie*.

7. Le *Calcul différentiel* eſt la méthode pour trouver ce que deviennent les rapports entre les différences finies des quantités variables, lorſqu'on ſuppoſe que ces différences deviennent nulles.

Il y a dans la Géométrie élémentaire un très grand nombre de propoſitions dont la démonſtration dépend de trouver ce que deviennent les rapports entre certaines quantités, lorſqu'on ſuppoſe que ces quantités deviennent nulles. Nous ne citerons que la ſuivante.

Fig. 2, pl. A. Soit inſcrit dans le cercle $AMBN$ un poligone régulier dont MN eſt un des côtés, & ſoit mené le rayon CB perpendiculaire à MN. Plus le nombre des côtés du polygone ſera grand, plus le rapport de ſon contour au rayon approchera du rapport de la circonférence du cercle au rayon. En nommant n le nombre des côtés du polygone, & π le rapport de la circonférence du cercle au rayon, on aura $\frac{n.MN}{CB}$ qui approchera d'autant plus d'être égal à π, que BP ſera moindre. Mais on a pour la ſurface du polygone $\frac{n.MN}{CB}.\frac{CB}{2}(CB-BP)$, qui approchera d'autant plus d'être égale à la ſurface du cercle, que BP ſera moindre. On trouvera

trouvera donc la ſurface du cercle en faiſant BP nul dans l'expreſſion précédente ; & comme alors $\frac{n \,.\, MN}{CB}$ ſera $= \pi$, on en tirera que la ſurface du cercle eſt égale à $\frac{\pi \,.\, CB^2}{2}$, ou au produit fait de la circonférence par la moitié du rayon.

8. On eſt convenu de ſe ſervir de $\frac{dy}{dx}$ pour déſigner ce que devient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lorſque chacune de ces différences devient nulle ; & on appelle *différentielles* du premier ordre les termes dy, dx du rapport $\frac{dy}{dx}$. Chercher ce rapport, c'eſt ce qu'on appelle *différentier ;* & on a donné le nom d'*équation différentielle* à l'équation qui réſulte de la *différentiation.*

Cela n'est guère clair ni rigoureux. Quoi ! Deux quantités qui cessent d'exister ont encore un rapport ?

Si $y = x^m$, on a (n°. 1.)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + m \,.\, \frac{m-1}{2} x^{m-2} \Delta x + \&c ;$$

& , faiſant Δx nul dans le ſecond membre,

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}, \text{ ou } dy = m x^{m-1} dx.$$

L'analyſe des *infiniment petits* a conduit au même réſultat ; auſſi n'avons-nous d'autre but que de faire voir qu'il eſt poſſible de fonder toute la *Géométrie tranſcendante* ſur des principes inconteſtables.

9. En faiſant $xy = z$, on aura $\frac{\Delta z}{\Delta x} = y + x \frac{\Delta y}{\Delta x} + \Delta y$. Mais lorſque les différences Δx & Δy deviendront nulles, les rapports $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ſeront changés en ceux-ci $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$; donc ſi $xy = z$, $\frac{dz}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}$; ce qu'on peut énoncer ainſi : la différentielle de xy eſt égale à $y\,dx + x\,dy$. Cette formule ſuffira pour trouver la différentielle d'une fonction quelconque, ſans chercher d'abord la différence finie de cette fonction.

On en tirera aiſément que la différentielle de $x^2 = 2x\,dx$; & faiſant $x^2 = y$, que celle de $x^3 = x^2 dx + 2x^2 dx = 3x^2 dx$; que celle de $x^4 = 4x^3 dx$; car, faiſant $x^3 = y$, on a $y\,dx + x\,dy = x^3 dx + 3x^3 dx = 4x^3 dx$; &, continuant toujours de la même maniere,

que la différentielle de x^m, m étant un nombre entier positif, est égale à $m x^{m-1} d x$. Pour trouver la différentielle de x^{-m}, je fais $x^{-m} = y$, d'où je tire $1 = x^m y$, &, différentiant cette équation, $0 = x^m dy + m y x^{m-1} dx$; donc $dy = - m x^{-m-1} dx$. Soit encore proposé de trouver la différentielle de $x^{\pm\frac{m}{n}}$, m & n étant des nombres entiers positifs; on fera $x^{\pm\frac{m}{n}} = y$, d'où l'on tirera $x^{\pm m} = y^n$, &, différentiant cette équation, $\pm m x^{\pm m - 1} dx = n y^{n-1} dy$; donc $dy = \pm \frac{m}{n} x^{\pm\frac{m}{n} - 1}$. En rassemblant tous ces cas particuliers, on verra qu'il est démontré de cette autre maniere que la différentielle de x^m, m étant tel nombre qu'on voudra, est égale à $m x^{m-1} d x$.

Maintenant voici une substitution qui pourra beaucoup faciliter la recherche des différentielles les plus compliquées. Nous en ferons usage pour trouver celles dont notre Auteur s'est occupé dans les exemples qui suivent la quatrieme regle.

Si l'on fait $\sqrt{xy + y^2} = z$, on aura $xy + y^2 = z^2$, & différentiant de part & d'autre, $x dy + y dx + 2 y dy = 2 z dz$; donc $dz = \frac{x dy + y dx + 2 y dy}{2\sqrt{xy + y^2}}$. On fera de même $\sqrt[3]{ax + x^2} = z$, & on aura $ax + x^2 = z^3$, $a dx + 2 x dx = 3 z^2 dz$; d'où il sera facile de tirer $dz = \frac{a dx + 2 x dx}{3\sqrt[3]{ax + x^2}}$.

Etant donnée la différentielle de $\sqrt{a^4 + axy^2}$, on demande celle de $\sqrt{ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2}}$? Il faudra faire cette quantité $= z$, & on aura $ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2} = z^2$; d'où l'on tirera, en différentiant de part & d'autre, $a dx + 2 x dx + d\sqrt{a^4 + axy^2} = 2 z dz$; & parcequ'il sera facile de trouver que la différentielle de $\sqrt{a^4 + axy^2}$ est $\frac{ay\, dx + 2 axy dy}{2\sqrt{a^4 + axy^2}}$, on ne tardera pas à s'assurer que celle de la

fonction proposée ou $dz = \frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax+x^2+\sqrt{a^4+axy^2}}} +$
$\frac{ay^2dx + 2axydy}{4\sqrt{a^4+axy^2}.\sqrt{ax+x^2+\sqrt{a^4+axy^2}}}$.

Soit $\frac{\sqrt[3]{ax+x^2}}{\sqrt{xy+y^2}} = z$; on aura $\sqrt[3]{ax+x^2} = z\sqrt{xy+y^2}$ & $d\sqrt[3]{ax+x^2} = zd\sqrt{xy+y^2} + \sqrt{xy+y^2}.dz$; mais nous venons de trouver $d\sqrt[3]{ax+x^2} = \frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{ax+x^2}^{2}}$, $d\sqrt{xy+y^2} = \frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+y^2}}$; donc, en dégageant dz dans l'équation précédente où l'on fera d'abord les substitutions que nous venons d'indiquer, on trouvera que la différentielle demandée est

$$\frac{adx+2xdx}{3\sqrt{xy+y^2}\,\sqrt[3]{ax+x^2}^{2}} - \frac{(xdy+ydx+2ydy)\sqrt[3]{ax+x^2}}{2(xy+y^2)\sqrt{xy+y^2}}.$$

10. On est convenu de se servir de $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2x}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$; &c, pour désigner ce que deviennent $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$; $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, $\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3}$; &c, lorsque chacune de ces différences devient nulle : & on appelle différentielles du second ordre, les termes d^2y, d^2x, dx^2 des rapports $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2x}{dx^2}$; différentielles du troisieme ordre, les termes d^3y, d^3x, dx^3 des rapports $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3x}{dx^3}$; & ainsi des autres.

On suppose que x varie uniformément, & l'on demande les différentielles successives de $xy = z$? On sait que la différentielle premiere est $ydx + xdy$; pour trouver les autres, on tirera des formules du 3e n°:

$$\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} = 2\frac{\Delta y}{\Delta x} + x\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + 2\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\Delta x,$$

$$\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} = 3\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + x\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + 3\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\Delta x,$$

$$\frac{\Delta^4 z}{\Delta x^4} = 4\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + x\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} + 4\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}\Delta x,$$

$$\frac{\Delta^5 z}{\Delta x^5} = 5\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} + x\frac{\Delta^5 y}{\Delta x^5} + 5\frac{\Delta^5 y}{\Delta x^5}\Delta x, \text{ \&c.}$$

On mettra dans celles-ci, au lieu des rapports entre les différences, les rapports entre les différentielles correſpondantes; ces ſubſtitutions faites, on effacera les termes qui ſeront encore multipliés par Δx, & on aura

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2 y}{dx^2},\ \frac{d^3 z}{dx^3} = 3\frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{d^3 y}{dx^3},$$

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = 4\frac{d^3 y}{dx^3} + x\frac{d^4 y}{dx^4},\ \frac{d^5 z}{dx^5} = 5\frac{d^4 y}{dx^4} + x\frac{d^5 y}{dx^5}, \&c.$$

Donc les différentielles de xy du ſecond ordre, du troiſieme ordre, &c. ſont

$$2\,dx\,dy + x\,d^2y,\ 3\,dx\,d^2y + x\,d^3y,$$

$$4\,dx\,d^3y + x\,d^4y,\ 5\,dx\,d^4y + x\,d^5y, \&c.$$

On demande dans la même hypotheſe les différentielles ſucceſſives de $x^m = y$? A cauſe de

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}\Delta x + \&c,$$

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = m.\overline{m-1}.x^{m-2} + m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}\Delta x + \&c.$$

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3} + m.\frac{m-1}{2}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.3x^{m-4}\Delta x + \&c.$$

&c.; on aura pour les différentielles demandées

$$mx^{m-1}dx,\ m.\overline{m-1}.x^{m-2}dx^2,\ m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}dx^3, \&c.$$

11. Mais comment repréſenter ce que deviennent les rapports $\frac{\Delta\frac{dy}{dx}}{\Delta x}$, $\frac{\Delta\frac{d^2y}{dx^2}}{\Delta x}$, &c, lorſque les différences finies Δx & Δy deviennent nulles? Cette queſtion mérite la plus grande attention. Dans l'exemple précédent $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = m.\overline{m-1}.x^{m-2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}$, &c; donc

$$\frac{\Delta\frac{dy}{dx}}{\Delta x} = m.\overline{m-1}.x^{m-2} + m.\overline{m-1}.\frac{m-2}{2}x^{m-3}\Delta x + \&c,$$

$$\frac{\Delta\frac{d^2y}{dx^2}}{\Delta x} = m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3} + m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\frac{m-3}{3}x^{m-4}\Delta x + \&c,$$

$$\frac{\Delta \frac{d^3y}{dx^3}}{\Delta x} = m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3} . x^{m-4} + m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3} . \frac{\overline{m-4}}{2} x^{m-5} \Delta x + \&c.$$

&c; & par conséquent lorſque Δx devient nul, ces rapports deviennent $m . \overline{m-1} . x^{m-2}$, $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . x^{m-3}$, $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3} . x^{m-4}$, &c. Or comme ce ſont là les valeurs de $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c; il eſt néceſſaire d'en conclure que, x étant ſuppoſé varier uniformément, $\frac{d^2y}{dx^2}$ peut également repréſenter ce que deviennent les rapports $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ & $\frac{\Delta \frac{dy}{dx}}{\Delta x}$, lorſque Δx & Δy deviennent nuls; que $\frac{d^3y}{dx^3}$ peut également repréſenter ce que deviennent les rapports $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ & $\frac{\Delta \frac{d^2y}{dx^2}}{\Delta x}$, lorſque Δx & Δy deviennent nuls; & ainſi de ſuite.

12. La méthode inverſe du calcul différentiel eſt appellée le calcul intégral. Pour déſigner l'intégrale d'une différentielle propoſée, on eſt convenu de mettre devant cette différentielle le ſigne $\int$; de maniere que $\int dX$ déſigne l'intégrale de dX ou X; $\int (a+x)^m\, dx$ l'intégrale de $(a+x)^m dx$; & ainſi des autres.

L'intégrale de $x^m dx$ eſt $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, ce dont on peut s'aſſurer en différentiant cette derniere quantité. Il y a cependant un cas qu'il faut excepter; c'eſt celui de $m = -1$, où la différentielle propoſée eſt $\frac{dx}{x}$; nous aurons occaſion d'en parler dans les notes de la ſection ſuivante. En attendant, nous remarquerons que dX n'étant pas plutôt la différentielle de X que celle de X augmenté ou diminué d'une quantité conſtante; il eſt néceſſaire d'ajouter en intégrant des conſtantes arbitraires pour avoir des intégrales complettes. Ainſi, hors le cas de $m = -1$, l'intégrale complette de $x^m dx$ eſt $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$; dans laquelle ſi l'on fait

C égal à zéro, ou à l'infini, ou à un nombre déterminé quelconque, on aura ce qu'on appelle une intégrale particuliere de la différentielle proposée.

Pour mieux faire sentir la nécessité d'ajouter cette constante arbitraire; soit proposé d'intégrer completement la différentielle $(a+x)^2 dx$. On peut le faire de deux manieres. En développant le binome, il vient $a^2 dx + 2axdx + x^2 dx$, dont l'intégrale est $a^2 x + ax^2 + \frac{x^3}{3}$, je n'ajoute point de constante arbitraire. Autrement, je fais $a + x = y$, d'où je tire $dx = dy$ & $(a+x)^2 dx = y^2 dy$, dont l'intégrale est $\frac{y^3}{3}$, ou $\frac{a^3}{3} + a^2 x + ax^2 + \frac{x^3}{3}$, je n'ajoute point encore de constante arbitraire. Ces deux résultats different de la quantité constante $\frac{a^3}{3}$; mais il est visible qu'ils ne sont l'un & l'autre que des intégrales particulieres comprises dans $a^2 x + ax^2 + \frac{x^3}{3} + C$ qui est l'intégrale complete de la différentielle proposée.

13. Je passe aux différentielles des ordres supérieurs, & je suppose que x varie uniformément. En différentiant deux fois $X + ax + b$, où a & b sont des quantités constantes, on trouve d'abord $dX + adx$, & ensuite $d^2 X$. Donc l'intégrale complette de l'ordre immédiatement inférieur, ou l'intégrale premiere complette, d'une différentielle du second ordre, doit renfermer une constante arbitraire; l'intégrale seconde complette en doit renfermer deux, tellement disposées entre elles, qu'on ne puisse les faire disparoître que par deux différentiations. En différentiant trois fois $X + ax^2 + bx + c$, on a 1°. $dX + 2axdx + bdx$, 2°. $d^2 X + 2adx^2$, 3°. $d^3 X$. D'où il suit que l'intégrale premiere complette d'une différentielle du troisieme ordre, doit renfermer une constante arbitraire; que l'intégrale seconde complette en doit renfermer deux, & la derniere trois. En général l'intégrale n complete d'une différentielle quelconque, doit renfermer n constante arbitraire, tellement disposées entre elles, qu'on ne puisse les faire disparoître que par un nombre n de différentiations.

On propose de trouver les intégrales successives de $d^n X$. On a pour la

premiere $d^{n-1}X + adx^{n-1}$ (il eſt clair que la conſtante arbitraire adx^{n-1} doit être une différentielle du même ordre que $d^{n-1}X$); pour la ſeconde $d^{n-2}X + axdx^{n-2} + bdx^{n-2}$; pour la troiſieme $d^{n-3}X + \frac{ax^2}{2}dx^{n-3} + bxdx^{n-3} + cdx^{n-3}$; enfin pour l'intégrale finie complette

$$X + \frac{ax^{n-1}}{1.2.3....n-1} + \frac{bx^{n-2}}{1.2.3...n-2} + ... + hx + i,$$

ou plus ſimplement

$$X + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + hx + i,$$

puiſque les conſtantes $a, b .... h, i$ ſont arbitraires.



SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes ſortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

Fig. 2. * Art. 3. SI l'on prolonge un des petits côtés Mm du poligone qui compoſe * une ligne courbe ; ce petit côté, ainſi prolongé, ſera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou m.

PROPOSITION I.

Problême.

Fig. 3. 9. *Soit une ligne courbe* AM *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *ſoit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *ſur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP, & ſuppoſé que la droite MT qui rencontre le diametre au point T, ſoit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x; PM, y; (donc Pp ou $MR = dx$, & $Rm = dy$.) les triangles ſemblables mRM & MPT donneront $mR\,(dy) . RM\,(dx) :: MP\,(y) . PT = \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes qui ſeront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y, & diviſée par dy, donnera une valeur de la ſoustangente PT en termes entiérement connus & délivrés des différences, laquelle ſervira à mener la tangente cherchée MT.

REMARQUE.

REMARQUE.

10. Lorſque le point T tombe du côté oppoſé au point A origine des x, il eſt clair que x croiſſant, y diminue, & qu'il faut changer par conſéquent * dans la différence de l'équation donnée les ſignes de tous les termes où dy ſe rencontre : autrement la valeur de dx en dy ſeroit négative; & partant auſſi celle de $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right)$. Il eſt mieux cependant, pour ne ſe point embarraſſer, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a preſcrites * ſans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur de IT ſoit poſitive, il s'enſuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine des x, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul : & au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Ceci s'éclaircira par les exemples ſuivants.

EXEMPLE I.

11. 1°. Si l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM; la courbe AM ſera une parabole qui aura pour parametre la droite donnée a, & l'on aura, en prenant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on mene la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. On aura, en prenant les différences, $xdy + ydx = 0$, & partant $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend $PT = PA$ du côté oppoſé au point A, & qu'on mene la droite MT, elle ſera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m mar-

que un nombre positif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorsqu'il marque un nombre négatif. On aura, en prenant les différences, $my^{m-1}\,dy = dx$, & partant $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = my^m = mx$ en mettant pour y^m sa valeur x.

Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation sera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la sous-tangente $PT = \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation sera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la sous-tangente $PT = -2x$. Il en est ainsi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raison de dx à dy en ce point; car il est visible que cette raison étant connue, l'angle que la tangente fait avec l'axe ou le diametre, sera aussi déterminé. On a dans cet exemple $dx.\,dy :: my^{m-1}.\,1$. D'où l'on voit que y étant zéro en A, la raison de dy à dx doit y être infiniment grande lorsque m surpasse 1, & infiniment petite lorsqu'elle est moindre: c'est-à-dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & se confondre avec le diametre dans le second.

EXEMPLE II.

FIG. 5. 12. Soit une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ ($x \times \overline{a-x}$). $\overline{PM}^2$ (yy) :: $AB(a)$. $AD(b)$. Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ sa valeur $ax - xx$; & $PT - AP$ ou $AT = \frac{ax}{a-2x}$.

Supposant à présent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2$ ($x^3 \times \overline{a-x}^2$). $\overline{PM}^5$ (y^5) :: AB (a). AD (b), on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$, & en

prenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx + 2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3}$ $= \frac{5xx \times \overline{a-x}}{3a-3x-2x}$ ou $\frac{5ax-5xx}{3a-5x}$ & $AT = \frac{2ax}{3a-5x}$.

Et généralement si l'on veut que m marque l'exposant de la puissance de AP, & n celui de la puissance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$ qui est une équation générale pour toutes les ellipses à l'infini, dont la différence est $\frac{\overline{m+n} \,.\, ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n \,.\, \overline{a-x}^{n-1} dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ sa valeur $x^m \times \overline{a-x}^n$) $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{\overline{m+n} \,.\, x^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - n \,.\, \overline{a-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+n} \,.\, x \times \overline{a-x}}{m \,.\, \overline{a-x} - nx}$, ou $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma-mx-nx}$, & $AT = \frac{nax}{ma-mx-nx}$.

EXEMPLE III.

13. Les mêmes choses étant posées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on suppose ici que le point B tombe de l'autre côté du point A par rapport au point P, on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles considérées par rapport à leurs diametres. D'ou l'on tirera comme ci-dessus $PT = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{ma + \overline{m+n} \,.\, x}$ & $AT \frac{nax}{ma + \overline{m+n} \,.\, x}$.

Maintenant si l'on suppose que AP soit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une distance

infinie, c'est-à-dire qu'elle en deviendra l'asymptote CE; & l'on aura en ce cas $AT\left(\frac{nax}{ma+\overline{m+n}.x}\right)=\frac{n}{m+n}a=AC$; puisque a étant infiniment moindre que x, le terme ma sera nul par rapport à $\overline{m+n}.x$. Par la même raison en ce cas l'équation à la courbe deviendra $ay^{m+n}=bx^{m+n}$. Ainsi en faisant pour abréger $m+n=p$, & en extrayant de part & d'autre la racine p, on aura $y\sqrt[p]{a}=x\sqrt[p]{b}$, dont la difference est $dy\sqrt[p]{a}=dx\sqrt[p]{b}$: de sorte qu'en menant AE parallele aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'asymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion $dx.dy$, ou $\sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b}::AC.\left(\frac{n}{p}a\right).AE=\frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}$. Or les valeurs de CA & de AE étant ainsi déterminées, on menera la droite indéfinie CE qui sera l'asymptote cherchée.

Si $m=1$ & $n=1$, la courbe sera l'hyperbole ordinaire, & on aura $AC=\frac{1}{2}a$, & $AE=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, c'est-à-dire à la moitié du diametre conjugué, ce que l'on sait d'ailleurs être conforme à la vérité.

EXEMPLE IV.

FIG. 6. 14. Soit l'équation $y^3-x^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, a est une ligne droite donnée) & que cette équation exprime la nature de la courbe AM, sa difference sera $3yydy-3xxdx=axdy+aydx$. Donc $\frac{ydx}{dy}=\frac{3y^3-axy}{3xx+ay}$, & $AT\left(\frac{ydx}{dy}-x\right)=\frac{3y^3-3x^3-2axy}{3xx+ay}=\frac{axy}{3xx+ay}$ en mettant pour $3y^3-3x^3$ sa valeur $3axy$.

Maintenant si l'on suppose que AP & PM soient cha-

cune infiniment grande, la tangente *TM* deviendra l'asymptote *CE*, & les droites *AT*, *AS* deviendront *AC*, *AE* qui déterminent la position de l'asymptote. Or *AT*, que j'appelle $t = \frac{axy}{3xx+ay}$, d'où l'on tire $y = \frac{3txx}{ax-at} = \frac{3tx}{a}$ lorsque *AT* devient *AC*, parcequ'alors at est nulle par rapport à ax. Mettant donc cette valeur $\frac{3tx}{a}$ à la place de y dans $y^3 - x^3 = axy$, on aura $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$, d'où l'on tire (en effaçant le terme $3a^3txx$, parceque x étant infinie, il est nul par rapport aux deux autres $27t^3x^3$ & a^3x^3) $AC(t) = \frac{1}{3}a$. De même AS * $\left(y - \frac{xdy}{dx}\right)$ que j'appelle $s = \frac{axy}{3yy-ax}$, d'où l'on tire $x = \frac{3syy}{ay+as} = \frac{3sy}{a}$, parceque y étant infinie par rapport à s, le terme as sera nul par rapport au terme ay; & en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, on trouvera $AE(s) = \frac{1}{3}a$. D'où il suit que si l'on prend les lignes *AC*, *AE* égales chacune à $\frac{1}{3}a$, & qu'on mene la droite indéfinie *CE*, elle sera l'asymptote de la courbe *AM*.

* Note 2, n°. 1.

On se réglera sur ces deux derniers exemples pour trouver les asymptotes des autres lignes courbes.

NOTE II.

1. Sur l'axe *APQ* je décris la courbe *AZ*, & j'abaisse les deux ordonnées perpendiculaires *MP*, *NQ*; je tire une corde *NM* que je prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne des abcisses, une tangente *MT* & une perpendiculaire *MO* à *QN*. Selon que la courbe est concave ou convexe vers *AP*, le rapport de *PT* à *MP*, est plus ou moins grand que celui de *PS* à *MP*, qui, à cause des triangles semblables *MPS*, *NOM*, est égal au rapport de *OM* à *NO*. Mais plus *N* sera proche de *M*, plus *S* sera proche de *T*, & moins ces deux rapports différeront; ils ne feront qu'une seule & même chose lorsque le point *N* tombera sur le point *M* Fig. 3, pl. A.

Et comme le rapport de OM à NO eſt le rapport entre les différences finies des co-ordonnées $AP\ (x)$, $MP\ (y)$; il eſt clair que pour trouver le rapport entre la ſous-tangente & l'ordonnée, il faut chercher ce que devient $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ lorſque ces différences deviennent nulles. On aura donc $PT = y\frac{dx}{dy}$, $AT = y\frac{dx}{dy} - x$, &, à cauſe de $PT \left(y\frac{dx}{dy}\right) : AT \left(y\frac{dx}{dy} - x\right) :: PM\ (y) : AB$, $AB = y - x\frac{dy}{dx}$.

On démontrera de la même maniere que le rapport de MT à MP eſt égal à ce que devient celui de la corde MN à NO lorſque les différences Δx & Δy deviennent nulles. Mais alors ce dernier rapport ſe confond avec celui de l'arc MN à NO; ainſi, en nommant l'arc AM, s, & $\frac{ds}{dy}$ ce que devient le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta y}$ lorſque les différences Δx & Δy deviennent nulles, on aura $\frac{MT}{y} = \frac{ds}{dy}$. Donc, à cauſe de $MT = \sqrt{\overline{TP}^2 + \overline{PM}^2} = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, on aura $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Je tire la normale MK, & le triangle TMK, rectangle en M, donne $TP : PM :: PM : PK = y\frac{dy}{dx}$; donc $KM = y\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. Si l'on prend le rayon des tables pour l'unité, le triangle TPM rectangle en P donnera $TM : MP :: 1 : \textit{ſin.}\ T = \frac{dy}{ds}$ & $TM : PT :: 1 : \textit{ſin.}\ TMP = \frac{dx}{ds}$. On aura encore $TP : PM :: 1 : \textit{tang.}\ T = \frac{dy}{dx}$, $MP : PT :: 1 : \textit{tang.}\ TMP = \frac{dx}{dy}$. Dans le triangle rectangle KPM, $KM : PM :: 1 : \textit{ſin.}\ MKA = \frac{dx}{ds}$ & $KM : KP :: 1 : \textit{cos.}\ MKA = \frac{dy}{ds}$.

2. Soit la courbe AZ un arc de cercle dont le rayon ſoit r, on aura $KM = KA = r$, $KP = \textit{cos.}\ s$, $MT = \textit{tang.}\ s$, $y = \textit{ſin.}\ s$,

$x = r - cos. s$; & les deux formules $MT = \frac{y\,ds}{dy}$, $KM = \frac{y\,ds}{dx}$, deviendront $\frac{ds \,.\, sin.\, s.}{d\,sin.\, s.} = tang.\, s = \frac{r\,sin.\, s}{cos.\, s}$, $\frac{ds \,.\, sin.\, s}{-\,d\,cos.\, s} = r$; d'où il sera facile de tirer $d\,sin.\, s = \frac{ds\, cos.\, s}{r}$, $d\,cos.\, s = -\frac{ds\,.\,sin.\, s}{r.}$; propositions qu'on a coutume d'énoncer ainsi :

La différentielle du sinus d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc multipliée par son cosinus & divisée par le rayon; la différentielle du cosinus d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc, prise négativement, multipliée par le sinus, & divisée par le rayon. Réciproquement, la différentielle d'un arc est égale à la différentielle de son sinus multipliée par le rayon & divisée par le cosinus, ou à la différentielle de son cosinus, prise négativement, multipliée par le rayon & divisée par le sinus. Il suit des deux dernieres propositions, que le rayon étant pris pour l'unité, $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$ est la différentielle de l'arc qui a pour sinus y, ou la différentielle, prise négativement, d'un arc qui a pour cosinus y.

Pour trouver la différentielle de la tangente de l'arc s, il faut se rappeller que $tang.\, s\,.\, cos.\, s = r\,sin.\, s$; donc $cos.\, s\, d\,tang.\, s - tang.\, s \frac{ds\; sin.\; s}{r} = ds\, cos.\, s$, & par conséquent $d\,tang.\, s = \frac{ds\,(sin.\, s^2 + cos.\, s^2)}{cos.\, s^2} = \frac{r^2\, ds}{cos\, s^2}$.

Donc la différentielle de la tangente d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré du cosinus. On démontrera de la même maniere que la différentielle de la co-tangente d'un arc quelconque est égale à la différentielle de l'arc, prise négativement, multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré du sinus. Réciproquement, la différentielle d'un arc est égale à la différentielle de sa tangente multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré de la secante, ou à la différentielle de la co-tangente, prise négativement, multipliée par le quarré du rayon, & divisée par le quarré de la co-secante. Il suit des deux dernieres propositions, que, le rayon étant pris pour l'unité, $\frac{dt}{1 + t^2}$ est la

différentielle de l'arc qui a pour tangente t, ou la différentielle, prise négativement, de l'arc qui a pour co-tangente t.

Au lieu des co-ordonnées x & y, si l'on introduit un rayon vecteur MV (fig. 3.), & l'angle MVA qu'il fait avec l'axe des
Fig. 3, pl. A. abcisses; en nommant VA, a, MV, u, & l'angle MVA, t; le triangle rectangle MPV donnera, en prenant toujours le rayon des tables pour l'unité, $y = u \sin. t$, $x = a - u \cos. t$. Donc, à cause de $dy = du \sin. t. + udt \cos. t$, $dx = - du \cos. t + udt \sin. t$, on trouvera $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{du^2 + u^2 dt^2}$. Nous ne croyons pas nécessaire de mettre un plus grand nombre de formules.

3. Les Géometres ont imaginé une courbe, qu'ils ont nommée logarithmique, dont la propriété principale est que les abcisses AP, AP', &c. étant en progression arithmétique, les ordonnées PM, $P'M'$, &c. sont en progression géométrique; c'est-à-dire que chaque ordonnée a pour logarithme l'abcisse correspondante. D'après cette définition, si nous nommons y, y', y'', &c. les ordonnées qui répondent aux abcisses x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, &c., nous aurons $\div\!\!\div\, y : y' : y''$: &c., & $y' - y : y'' - y'$: &c. : : $y : y'$: &c. En général, soient y & z deux ordonnées de cette courbe, x & u les abcisses correspondantes, y' & z' ce que deviennent les ordonnées lorsque les abcisses deviennent $x + q$ & $u + q$; on aura $y' - y : z' - z : : y : z$; c'est-à-dire que quelle que soit la différence de l'abcisse, pourvu qu'on regarde cette différence comme une quantité constante, la raison entre les différences de deux ordonnées sera celle de ces ordonnées mêmes. On tire de là que $\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{\Delta z}{\Delta x} : : y : z$, ou bien que $\frac{y \Delta x}{\Delta y} = \frac{z \Delta x}{\Delta z}$: or comme cette équation doit être vraie, quel que soit Δx, elle le sera encore lorsque cette différence deviendra nulle; on en tirera donc $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{z\,dx}{dy}$, ou, ce qui est précisément la même chose, que dans toute logarithmique les sous-tangentes sont égales entre elles. Donc toute logarithmique a pour équation $\frac{y\,dx}{dy} =$ constante. Dans le calcul différentiel & le calcul intégral on fait cette constante $= 1$; c'est pourquoi ce signe *log.* mis devant une quantité, indiquera toujours dans

dans la ſuite le logarithme de cette quantité, calculé d'après la ſuppoſition de la ſous-tangente de la logarithmique priſe pour l'unité.

4. Il ſuit de ce qui précede que la différentielle du logarithme, ou la différentielle logarithmique d'une quantité quelconque, eſt égale à la différentielle de cette quantité diviſée par la quantité même. Ainſi la différentielle de $log.\ x = \frac{dx}{x}$; voici d'autres exemples plus compliqués.

La différentielle logarithmique de $x + \sqrt{a^2 + x^2}$ eſt égale à $\frac{dx + \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x + \sqrt{a^2+x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Pour trouver celle de $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, je remarque que le logarithme de cette quantité devient

$log.\ (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - log.\ (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$,

qui a pour différentielle

$$\frac{\frac{dx}{2\sqrt{1+x}} - \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} - \frac{\frac{dx}{2\sqrt{1+x}} + \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{dx(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x})}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$- \frac{dx(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})} = \frac{-dx((\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2+(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2)}{2\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}$$

$$= \frac{-dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

On demande la différentielle de $(log.\ x^m)^n$, m & n étant des nombres quelconques. Cette quantité devient $(m\ log.\ x)^n$, & celle-ci a pour différentielle $\frac{mndx}{x}(m\ log.\ x)^{n-1} = \frac{mndx}{x}(log.\ x^m)^{n-1}$. Soit encore propoſé de trouver la différentielle de *log. log. x*. On fera $log.\ x = u$, d'où l'on tirera $\frac{dx}{x} = du$. Mais $log.\ log.\ x = log.\ u$; donc $d\ log.\ log.\ x = \frac{du}{u} = \frac{dx}{x\ log.\ x}$.

5. On a donné le nom d'*exponentielles* aux quantités élevées à une puiſſance dont l'expoſant eſt variable; telles ſont a^x, y^x; & celles-ci

a^{x^y}, y^{x^u}, &c. qu'on appelle quantités exponentielles du second degré, parceque les exposants sont eux-mêmes des exponentielles du premier degré, comme on appelle exponentielles du degré n, celles dont les exposants sont des exponentielles du degré $n - 1$.

On demande de trouver la différentielle de a^x, où a est constant & x une variable quelconque. Soit $a^x = y$; on transformera cette équation en celle-ci $x\, log.\, a = log.\, y$, d'où l'on tirera $\frac{dy}{y} = dx\ log.\ a$ & $dy = a^x\, dx\, log.\, a$. Si l'on demandoit la différentielle de y^x, on feroit $y^x = z$, d'où l'on tireroit $x\, log.\, y = log.\, z$, & $dx\, log.\, y + \frac{x\, dy}{y} = \frac{dz}{z}$; il est clair qu'on auroit pour la différentielle demandée $y^x \left(dx\, log.\, y + \frac{x\, dy}{y} \right)$.

Il ne sera pas beaucoup plus difficile de trouver celle de y^{x^u}; car, en supposant cette quantité $= z$, on aura $u\, log.\, y^x = log.\, z$, & $du\, log.\, y^x + u\, d\, log.\, y^x = \frac{dz}{z}$. Mais $d\, log.\, y^x = y^x \left(dx\, log.\, y + x \frac{dy}{y} \right)$; donc $dz = y^{x^u} \left(du\ log.\ y^x + y^x (u\, dx\, log.\, y + u\, x \frac{dy}{y}) \right)$; & ainsi de toutes celles qu'on pourra proposer.

6. Nous avons vu que $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ est la différentielle de l'arc qui a pour sinus x, & pour rayon l'unité; mais cette différentielle est encore celle de $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, log.\, (x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2})$, comme il sera facile de s'en assurer en différentiant; donc, le rayon étant pris pour l'unité, si l'on nomme s l'arc dont x est le sinus, on aura $s\sqrt{-1} = log.\ (x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2})$. On tire de là, en prenant e pour le nombre dont le logarithme est l'unité, $e^{s\sqrt{-1}} = x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2}$; & par conséquent $e^{2s\sqrt{-1}} - 2x\sqrt{-1}$. $e^{s\sqrt{-1}} = 1$. Donc x ou $sin.\ s = \frac{e^{s\sqrt{-1}} - e^{-s\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, $\sqrt{1 - x^2}$ ou $cos.\ s$

$= \frac{e^{s\sqrt{-1}} + e^{-s\sqrt{-1}}}{2}$ On a auſſi $e^{s\sqrt{-1}} = cos. s + \sqrt{-1}.fin. s$, $e^{-s\sqrt{-1}} = cos. s - \sqrt{-1}. fin. s$. Ces formules ſont infiniment commodes pour transformer des quantités qui contiennent des imaginaires en d'autres qui ſoient réelles ; en général ſi les quantités qui contiennent des imaginaires ſont des arcs de cercle, celles dans leſquelles on peut les transformer ſont des logarithmes, & réciproquement.

7. Il nous reſte à éclaircir la théorie des aſymptotes, qui elle-même eſt fondée ſur celle de l'infini. Soit pour cela deux droites paralleles *A B* & *C D*, une oblique *K M* & une perpendiculaire *K P* à *CD*. Plus le point *M* s'éloignera du point *P*, plus la droite *K M* approchera de ſe confondre avec la droite *K B*, ſans pouvoir jamais y parvenir, quoique *P M* ſoit ſuſceptible d'augmentation ſans fin. Mais $P M = \frac{cos. M}{fin. M}$, ſi l'on fait $PK = 1$: or comme *K M* ne parviendra à ſe confondre avec *KB* que lorſque l'angle *M* ſera nûl, & qu'alors $fin. M = 0$, $cos. M = 1$, il eſt clair que $\frac{1}{0}$ eſt la limite dont *P M*, en augmentant ſans fin, approchera toujours ſans pouvoir y atteindre ; de même que 0 eſt la limite dont les rapports qui diminuent peuvent approcher continuellement ſans jamais ſe confondre avec elle. Fig. 4, pl. A.

Lorſqu'une branche de courbe qui s'étend à l'infini, a une aſymptote, elle s'en approche ſans ceſſe, ſans pouvoir l'atteindre. Si à un des points du cours infini, nous menons une tangente *M T* qui rencontre la ligne des abciſſes, on verra que plus l'abciſſe augmentera, plus la tangente correſpondante approchera de ſe confondre avec l'aſymptote. Ainſi, pour trouver le point *C*, où l'aſymptote d'une ligne courbe rencontre la ligne des abciſſes, il faudra faire $x = \frac{1}{0}$ dans la valeur de *A T*. Dans l'exemple III, où $A T = \frac{nax}{ma + \overline{m+n}.x}$, on trouvera $A C = \frac{na}{m+n}$. Fig. 6.

Dans l'exemple IV, où $A T = \frac{axy}{3x^2 + ay}$, comme par la nature de la courbe, *x* & *y* augmentent en même temps, il faudra faire ces co-ordonnées chacune égale à $\frac{1}{0}$, ce qui donnera $A C = \frac{a}{3}$.

PROPOSITION II.

Problême.

Fig. 7. 15. *Si l'on ſuppoſe dans la propoſition précédente que les coupées* AP *ſoient des portions d'une ligne courbe dont l'on ſache mener les tangentes* PT, *& qu'il faille du point donné* M *ſur la courbe* AM *mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, & ſuppoſé que la droite MT qui la rencontre en T, ſoit la tangente cherchée ; on imaginera une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, & une petite droite MR parallele à PT : & en nommant les données AP, x ; PM, y ; on aura comme auparavant Pp ou $MR = dx$, $Rm = dy$, & les triangles ſemblables mRM & MPT donneront $mR(dy) . RM(dx) :: MP(y) . PT = \frac{ydx}{dy}$. On achevera enſuite le reſte par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées $AP(x)$ aux appliquées $PM(y)$, comme l'on a vu dans les exemples qui précedent, & comme l'on verra encore dans ceux qui ſuivent.

Ayant tiré les deux ordonnées MQ, mq, j'imagine un arc MR ſemblable & parallele à Pp, & qui ſera par conſéquent la différence finie de AP. Puis je remarque que plus le point m ſera proche du point M, plus le rapport de $mR\ (\Delta y)$ à $RM\ (\Delta x)$ approchera de celui de MP à PT; d'où il ſuit qu'on aura néceſſairement $dy : dx :: y : PT$.

EXEMPLE I.

16. Soit $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, dont la différence eſt $\frac{2xydy - yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$: on aura en réduiſant cette égalité à une proportion $dy . dx\ (MP . PT) :: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx} . \frac{2xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Et partant le rap-

port de la donnée MP à la ſous-tangente cherchée PT, ſera exprimé en termes entiérement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit propoſé.

EXEMPLE II.

17. Soit $x = \frac{ay}{b}$, dont la différence eſt $dx = \frac{ady}{b}$: on aura $PT\ \left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{ay}{b} = x$. Si l'on ſuppoſe que la ligne courbe APB ſoit un demi-cercle, & que les appliquées MP étant prolongées en Q, ſoient perpendiculaires ſur le diametre AB; la courbe AMC ſera une demi-roulette, ou cycloïde : ſimple lorſque $b = a$, allongée lorſqu'elle eſt plus grande, & accourcie lorſqu'elle eſt moindre.

On imagine que le demi-cercle APB, dont le diametre AB eſt perpendiculaire ſur BC, roule ſur cette droite BC, juſqu'à ce que le point A ſoit parvenu en C; dans ce mouvement le point A décrira une portion de courbe AMC, qu'on appelle demi-cycloïde. On peut concevoir que le point A décrit uniformément un arc de la demi-circonférence APB, tandis que le point B parcourt une portion de la droite BC; or ſi pour exprimer le rapport de ces deux mouvements uniformes, on écrit $x : y :: a : b$, on aura $x > y$, & la cycloïde accourcie, ſi $a > b$; $x < y$, & la cycloïde allongée, ſi $a < b$; lorſque $a = b$, la cycloïde eſt ſimple.

COROLLAIRE.

18. Si la roulette étant ſimple, l'on mene la corde AP; je dis qu'elle ſera parallele à la tangente MT. Car le triangle MPT étant alors iſoſcele, l'angle externe TPQ ſera double de l'interne oppoſé TMQ. Or l'angle APQ eſt égal à l'angle APT, puiſque l'un & l'autre a pour meſure la moitié de l'arc AP; & partant il eſt la moitié de l'angle TPQ. Les angles TMQ, APQ ſeront donc égaux entre eux; & par conſéquent les lignes MT, AP ſeront paralleles.

PROPOSITION III.

Problême.

Fig. 7. 19. *Soit une ligne courbe quelconque* AP *qui ait pour diametre la droite* KNAQ, *& dont l'on ſache mener les tangentes* PK; *ſoit de plus une autre courbe* AM *telle que menant comme on voudra, l'appliquée* MQ *qui coupe la premiere courbe au point* P, *la relation de l'arc* AP *à l'appliquée* MQ *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *mener la tangente* MN.

Ayant nommé les connues PK, t; KQ, s; l'arc AP, x; MQ, y; l'on aura (en concevant une autre appliquée mq infiniment proche de MQ, & en tirant PO, MS paralleles à AQ.) $Pp = dx$, $mS = dy$; & à cauſe des triangles ſemblables KPQ & PpO, mSM & MQN, l'on aura $PK\ (t)$. $KQ\ (s) :: Pp\ (dx)$. PO ou $MS = \frac{sdx}{t}$. Et $mS\ (dy)$. $SM\ (\frac{sdx}{t}) :: MQ\ (y)$. $QN = \frac{sydx}{tdy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée on trouvera une valeur de dx en termes qui ſeront tous affectés par dy, & partant ſi l'on ſubſtitue cette valeur à la place de dx dans $\frac{sydx}{tdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſous-tangente cherchée QN ſera exprimée en termes tous connus. Ce qu'il falloit trouver.

Il étoit aiſé de trouver NQ ſans employer le triangle infiniteſimal. Suivant la note 2, n°. 1, $NQ = \frac{ydAQ}{dy}$; $KQ = s = PQ \frac{dAQ}{dPQ}$, donc $dAQ = \frac{sdPQ}{PQ}$; $KP = t = PQ \frac{dx}{dPQ}$, donc $dPQ = \frac{PQ}{t} dx$; donc $dAQ = \frac{sdx}{t}$, & $NQ = \frac{sydx}{tdy}$.

PROPOSITION IV.

Problême.

20. *Soient deux lignes courbes* AQC, BCN *qui aient pour diametre la droite* TEABF, *& dont l'on ſache mener les tangentes* QE, NF; *ſoit de plus une autre ligne courbe* MC *telle que la relation des appliquées* MP, QP, NP, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *ſur cette derniere courbe lui mener la tangente* MT. FIG. 8.

Ayant imaginé aux points Q, M, N, les petits triangles QOq, MRm, NSn, & nommé les connues PE, s, PF, t; PQ, x; PM, y; PN, z; l'on aura $Oq = dx$, $Rm = dy$, $Sn = -dz$, * parceque x & y croiſſant, z diminue. Et à cauſe des triangles ſemblables QPE & qOQ, NPF & nSN, MPT & mRM; l'on aura $QP(x).PE(s)::qO(dx).OQ$ ou MR ou $SN = \frac{sdx}{x}$. Et $NP(z).PF(t)::nS(-dz).SN = \frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ (d'où l'on tire $dz = \frac{-szdx}{tx}$). Et $mR(dy).RM\left(\frac{sdx}{x}\right)::MP(y).PT = \frac{sydx}{xdy}$. Or ſi l'on met dans la différence de l'équation donnée, à la place de dz, ſa valeur $-\frac{szdx}{tx}$, on trouvera une valeur de dx en dy, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{sydx}{xdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſous-tangente PT ſera exprimée en termes tous connus. * *Art.* 8.

Lorſque ces proportions $x:s::dx:\frac{sdx}{x}$, &c. ont lieu, les triangles QOq, &c. n'exiſtent déja plus, puiſqu'ils diſparoiſſent lorſque les différences QO, OQ, &c. deviennent nulles. En général, dans les problêmes qui précedent & ceux qui ſuivent, tout ſe réduit à obſerver le rapport dont le rapport entre les différences finies des co-ordonnées approchera d'autant plus que ces différences ſeront moindres. Si le premier

rapport eſt $A : B$, & que celui entre les différences finies ſoit $\Delta x : \Delta y$; en nommant $dx : dy$ ce que devient $\Delta x : \Delta y$, lorſque ces différences deviennent nulles, on aura $dx : dy :: A : B$.

EXEMPLE.

21. Soit $yy = xz$, dont la différence eſt $2ydy = zdx + xdz = \frac{tzdx - szdx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur négative $-\frac{szdx}{tx}$, d'où l'on tire $dx = \frac{2tydy}{tz - sz}$; & partant PT $\left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{2sty^2}{txz - sxz} = \frac{2st}{t - s}$, en mettant pour yy ſa valeur xz.

Soit maintenant l'équation générale $y^{m+n} = x^m z^n$, dont la différence eſt $\overline{m+n} \cdot y^{m+n-1} dy = mz^n x^{m-1} dx + nx^m z^{n-1} dz = \frac{mtz^n x^{m-1} dx - nsz^n x^{m-1} dx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur $\frac{-szdx}{tx}$, d'où l'on tire PT $\left(\frac{sydx}{xdy}\right) = \frac{\overline{mst + nst} \cdot y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt - ns}$, en mettant pour y^{m+n} ſa valeur $x^m z^n$.

On peut remarquer que ſi les courbes AQC, BCN devenoient des lignes droites, la courbe MC ſeroit alors une des Sections coniques à l'infini; ſavoir une Ellipſe lorſque l'appliquée CD, qui part du point de rencontre C, tombe entre les extrémités A, B; une Hyperbole lorſqu'elle tombe de part ou d'autre; & enfin une Parabole lorſque l'une des extrémités A ou B eſt infiniment éloignée de l'autre, c'eſt-à-dire lorſque l'une des lignes droites CA ou CB eſt parallele au diametre AB.

Si les lignes AQC, BCN étoient des lignes droites, on auroit $x^m : s^m :: \overline{CD}^m : \overline{ED}^m$, $z^n : t^n :: \overline{CD}^n : \overline{FD}^n$, & multipliant par ordre les deux proportions, & ſubſtituant y^{m+n} à $x^m z^n$, $y^{m+n} : \overline{CD}^{m+n} :: s^m t^n : \overline{ED}^m \cdot FD^n$, c'eſt-à-dire que la courbe MC eſt une ſection conique.

PROPOSITION

PROPOSITION V.

Problême.

22. *Soit une ligne courbe* APB *qui ait un commencement fixe & invariable au point* A, *& dont l'on ſache mener les tangentes* PH; *ſoit hors de cette ligne un autre point fixe* F, *& une autre ligne courbe* CMD *telle qu'ayant mené la droite quelconque* FMP, *la relation de ſa partie* FM *à la portion de courbe* AP *ſoit exprimée par telle équation qu'on voudra. On propoſe de mener du point donné* M *la tangente* MT. FIG. 9.

Ayant mené ſur FP la perpendiculaire FH qui rencontre la tangente donnée PH au point H, & la cherchée MT au point T, imaginé une droite $FRmOp$ qui faſſe avec FP un angle infiniment petit, & décrit du centre F les petits arcs de cercle PO, MR; le petit triangle pOP ſera ſemblable au triangle rectangle PFH; car les angles HPF, HpF ſont * égaux, puiſqu'ils ne different entre eux que de l'angle PFp que l'on ſuppoſe infiniment petit, & de plus l'angle pOP eſt droit puiſque la tangente en O (qui n'eſt autre choſe que la continuation du petit arc PO conſiderée comme une droite) eſt perpendiculaire ſur le rayon FO. Par la même raiſon les triangles mRM, MFT ſeront ſemblables. Or il eſt clair que les petits triangles ou ſecteurs FPO & FMR ſont ſemblables. Si donc l'on nomme les connues PH, t; HF, s; FM, y; FP, z; & l'arc AP, x; on aura $PH\,(t) . HF\,(s) :: Pp\,(dx) . PO = \frac{sdx}{t}$. Et $FP\,(z) . FM\,(y) :: PO\left(\frac{sdx}{t}\right) . MR = \frac{ysdx}{tz}$. Et $mR\,(dy) . RM\left(\frac{sydx}{tz}\right) :: FM\,(y) . FT = \frac{syydx}{tzdy}$. Et on achevera le reſte par le moyen de la différence de l'équation donnée.

* *Art.* 2.

En prenant l'angle HFP quelconque, ſi nous le nommons $\mathfrak{C}$, nous aurons $\mathit{ſin.}\,\mathfrak{C} : \mathit{ſin.}\,H :: t : z$. Mais le rayon étant pris pour l'unité $\mathit{ſin.}\,H = \frac{d.z\,\mathit{ſin.}\,\mathfrak{C}}{dx}$ (Note 2, n°. 4); donc $\frac{zdx\,\mathit{ſin.}\,\mathfrak{C}}{t} = dz\,\mathit{ſin.}\,\mathfrak{C} + zd\mathfrak{C}\,\mathit{coſ.}\,\mathfrak{C}$

De plus, si l'on conçoit une perpendiculaire Y abaissée du point P sur FH, on aura, en nommant X la distance du point F à cette perpendiculaire, $FH = X - \frac{YdX}{dY}$; car les Y augmentant, les X diminuent; &, à cause de $X = z \cos. \beta$, $Y = z \sin. \beta$, il sera facile d'en tirer $s = z \cos. \beta - \frac{dz \cos. \beta - z d\beta \sin. \beta}{dz \sin. \beta + z d\beta \cos. \beta} . z \sin. \beta$; ou, mettant pour $dz \sin. \beta + z d\beta \cos. \beta$ sa valeur $\frac{z dx \sin. \beta}{t}$, il sera facile d'en tirer $\frac{z \cos. \beta - s}{t} dx = dz \cos. \beta - z d\beta \sin. \beta$. Après avoir multiplié cette équation par $\sin. \beta$, on l'ôtera de la premiere multipliée par $\cos. \beta$, & il viendra $\frac{sdx}{t} \sin. \beta = z d\beta$. On démontreroit de la même maniere qu'en nommant u l'arc CM, on doit avoir $FT = \frac{yd\beta}{du \sin. \beta} MT$, ou, parceque $MT =$ (Note 2, n°. 1.) $\frac{y \sin. \beta . du}{d . y \sin. \beta}$, $FT = \frac{y^2 d\beta}{dy \sin. \beta + y d\beta \cos. \beta}$. On mettra pour $d\beta$ sa valeur $\frac{sdx \sin. \beta}{tz}$, & on aura $FT = \frac{y^2 sdx}{tzdy + ysdx \cos. \beta}$. Si FT doit être perpendiculaire sur FP, β étant un angle droit, on aura $\cos. \beta = 0$; & la valeur de FT que nous venons de trouver, sera réduite à $\frac{y^2 sdx}{tzdy}$.

EXEMPLE.

FIG. 10. 23. Si l'on veut que la courbe APB soit un cercle qui ait pour centre le point fixe F; il est clair que la tangente PH devient parallele & égale à la soutangente FH, à cause que HP sera aussi perpendiculaire à PF; & qu'ainsi l'on aura en ce cas $FT = \frac{yydx}{zdy} = \frac{yydx}{ady}$, en nommant la droite $FP (z)$, a; parcequ'elle devient constante de variable qu'elle étoit auparavant. Cela posé, si l'on nomme la circonférence entiere, ou une de ses portions déterminées, b; & que l'on fasse $b . x :: a . y$. la courbe CMD, qui est en ce cas FMD,

sera la spirale d'Archimede, & l'on aura $y = \frac{ax}{b}$ qui a pour sa différence $dy = \frac{adx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{bydy}{a} = xdy$ en mettant pour y sa valeur $\frac{ax}{b}$; & partant $FT\ \left(\frac{yydx}{ady}\right) = \frac{xy}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit décrit du centre F & du rayon FM, l'arc de cercle MQ, terminé en Q par le rayon FA qui joint les points fixes A, F; soit pris FT égale à l'arc MQ : je dis que la droite MT sera tangente en M. Car à cause des secteurs semblables FPA, FMQ, l'on aura $FP\ (a) . FM\ (y) :: AP\ (x) . MQ = \frac{yx}{a} = FT$.

Si l'on fait en général $b . x :: a^m . y^m$, (l'exposant m désigne un nombre entier ou rompu tel que l'on veut) la courbe FMD sera une des spirales à l'infini, & l'on aura $y^m = \frac{a^m x}{b}$, qui a pour sa différence $my^{m-1}\ dy = \frac{a^m dx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$, en mettant pour y^m sa valeur $\frac{a^m x}{b}$, & partant $FT\ \left(\frac{yydx}{ady}\right) = \frac{mxy}{a} = m \times MQ$.

Si on conçoit que l'extrémité A du rayon FA, mobile autour du centre F, décrive uniformément la circonférence APB, tandis qu'un point mobile parcourt aussi d'un mouvement uniforme le rayon FA allant de F vers A; ce point mobile décrira, par la composition de ces deux mouvements, une courbe FMD, à laquelle Archimede a donné le nom de spirale. Je suppose que le rayon FA étant en FP, le point mobile soit en M; on aura $a : y :: b : x$.

PROPOSITION VI.

Problême.

24. *Soit une ligne courbe* APB *dont l'on sache mener les tangentes* PH, *& un point fixe* F *hors de cette ligne; soit* Fig. 11.

une autre ligne courbe CMD *telle que menant comme on voudra, la droite* FPM, *la relation de* FP *à* FM *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point donné* M *mener la tangente* MT.

Ayant mené la droite FHT perpendiculaire sur FM, & imaginé comme dans la proposition précédente les petits triangles POp, MRm semblables aux triangles HFP, TFM, on nommera les connues FH, s; FP, x; FM, y; & l'on aura $PF(x) . FH(s) :: pO(dx) . OP = \frac{sdx}{x}$. Et $FP(x) . FM(y) :: OP\left(\frac{sdx}{x}\right) . RM = \frac{sydx}{xx}$. Et $mR(dy)$. $RM\left(\frac{sydx}{xx}\right) :: FM(y) . FT = \frac{syydx}{xxdy}$. On achevera ensuite le reste par le moyen de la différence de l'équation donnée.

EXEMPLE.

25. Si l'on veut que la courbe APB soit une ligne droite PH, & que l'équation qui exprime la relation de FP à FM soit $y - x = a$, c'est-à-dire que PM soit toujours égale à la même droite donnée a; l'on aura pour différence $dy = dx$; & partant $FT\left(\frac{syydx}{xxdy}\right) = \frac{syy}{xx}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée ME parallele à PH, & MT parallele à PE; je dis qu'elle sera tangente en M.

Car $FP(x) . FH(s) :: FM(y) . FE = \frac{sy}{x}$. Et $FP(x) . FE\left(\frac{sy}{x}\right) :: FM(y) . FT = \frac{syy}{xx}$. Il est clair que la courbe CMD est la Conchoïde de Nicomede, dont l'asymptote est la droite PH, & le pole est le point fixe F.

Si d'un point fixe F, pris hors la ligne HP, on tire des droites FPM telles que PM soit toujours égale à la même droite donnée a; la courbe qui passera par tous les points M sera la conchoïde de Nicomede. Cette

courbe a pour aſymptote la droite PH; car il eſt clair qu'elle approchera ſans ceſſe de cette droite ſans pouvoir l'atteindre.

PROPOSITION VII.

Problême.

26. *Soit une ligne courbe* ARM *dont l'on ſache mener les tangentes* MH, *& qui ait pour diametre la droite* EPAHT; *ſoit hors de ce diametre un point fixe* F, *d'où parte une ligne droite indéfinie* FPSM *qui coupe le diametre en* P *& la courbe en* M. *Si l'on conçoit maintenant que la droite* FPM *en tournant autour du point* F, *faſſe mouvoir le plan* PAM *toujours parallélement à ſoi-même le long de la ligne droite* ET *immobile & indéfinie, en ſorte que la diſtance* PA *demeure partout la même; il eſt clair que l'interſection continuelle* M *des lignes* FM, AM *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CMD. *On propoſe de mener d'un point donné* M *ſur cette courbe la tangente* MT. Fig. 12.

Ayant imaginé que le plan PAM ſoit parvenu dans la ſituation infiniment proche pam, & tiré la ligne mRS parallele à AP; il eſt clair par la génération que $Pp = Aa = Rm$; & partant que $RS = Sm - Pp$. Or nommant les connues FP ou Fp, x; FM ou Fm, y; PH, s; MH, t; & la différence Pp, dz; les triangles ſemblables FPp & FSm, MPH & MSR, MHT & MRm, donneront Fp $(x) . Fm(y) :: Pp(dz) . Sm = \frac{ydz}{x}$ (donc $SR = \frac{ydz - xdz}{x}$).

Et $PH(s) . HM(t) :: SR\left(\frac{ydz - xdz}{x}\right) . RM = \frac{tydz - txdz}{sx}$.

Et $MR\left(\frac{tydz - txdz}{sx}\right) . Rm(dz) :: MH(t) . HT = \frac{sx}{y - x}$.

Donc ſi l'on mene FE parallele à MH, & qu'on prenne $HT = PE$, la ligne MT ſera la tangente cherchée.

Si la ligne AM étoit une ligne droite; la courbe CMD ſeroit une Hyperbole qui auroit pour une de ſes aſymptotes la ligne ET. Et ſi elle étoit un cercle qui eût ſon centre au point P; la courbe CMD ſeroit la Conchoïde de Nicomede,

qui auroit pour asymptote la ligne ET, & pour pole le point F. Mais si elle étoit une parabole ; la courbe CMD seroit la compagne de la Paraboloïde de *Descartes* *, qui se décriroit en même temps au-dessous de la droite ET par l'intersection de FP avec l'autre moitié de la parabole.

* *Géom. Liv.* 3.

PROPOSITION VIII.

Problême.

FIG. 13. 27. *Soit une ligne courbe* AN *qui ait pour diametre la ligne droite* AP, *avec un point fixe* F *hors de ces lignes ; soit une autre ligne courbe* CMD *telle que menant comme l'on voudra, la droite* FMPN, *la relation de ses parties* FN, FP, FM *soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de tirer du point donné* M *la tangente* MT.

Soit menée par le point F la ligne HK perpendiculaire à FN, qui rencontre en K le diametre AP, & en H la tangente donnée NH ; soient décrits du centre F & des intervalles FN, FP, FM de petits arcs de cercle NQ, PO, MR terminés par la droite Fn que l'on conçoit faire avec FN un angle infiniment petit. Cela posé.

Si l'on nomme les connues FK, s; FH, t; FP, x; FM, y; FN, z; les triangles semblables PFK & pOP, FMR & FPO & FNQ, HFN & NQn, mRM & MFT donneront $PF\,(x) \,.\, FK\,(s) :: pO\,(dx) \,.\, OP = \frac{sdx}{x}$. Et $FP\,(x) \,.\, FM\,(y) :: PO\,\left(\frac{sdx}{x}\right) \,.\, MR\,\frac{sydx}{xx}$. Et $FP\,(x) \,.\, FN\,(z) :: PO\,\left(\frac{sdx}{x}\right) \,.\, NQ = \frac{szdx}{xx}$. Et $HF\,(t) \,.\, FN\,(z) :: NQ\,\left(\frac{szdx}{xx}\right) \,.\, Qn\,(-dz) = \frac{szzdx}{txx}$. Et $mR\,(dy) \,.\, RM\,\left(\frac{sydx}{xx}\right) :: FM\,(y) \,.\, FT = \frac{syydx}{xxdy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dy en dx & dz, dans laquelle mettant à la place de dz sa valeur négative $\frac{-szzdx}{txx}$, parceque x croissant,

z diminue; tous les termes seront affectés par dx; de sorte que cette valeur étant enfin substituée dans $\frac{syydx}{xxdy}$, les dx se détruiront. Et partant la valeur de FT sera exprimée en termes connus & délivrés des différences.

Si l'on supposoit que la ligne droite AP fût une ligne courbe, & qu'on menât la tangente PK; on trouveroit toujours pour FT la même valeur, & le raisonnement demeureroit le même.

EXEMPLE.

28. Supposons que la ligne courbe AN soit un cercle qui passe par le point F (tellement situé à l'égard du diametre AP que la ligne FB perpendiculaire à ce diametre passe par le centre G de ce cercle), & que PM soit toujours égale à PN; il est clair que la courbe CMD, qui devient en ce cas FMA, sera la Cissoïde de *Diocles*, & que l'on aura pour équation $z + y = 2x$, dont la différence est $dy = 2dx - dz = \frac{2txxdx + szzdx}{txx}$ en mettant pour dz sa valeur $-\frac{szzdx}{txx}$ trouvée ci-dessus *. Et partant FT $\left(\frac{syydx}{xxdy}\right) = \frac{styy}{2txx + szz}$. Fig. 14. * *Art.* 27.

Un demi-cercle FAB étant donné, & un rayon GA perpendiculaire au diametre FB, si l'on tire des droites FN, & qu'ensuite l'on prenne $PM = PN$, tous les points M appartiendront à une courbe FMA, qui sera la cissoïde de Dioclès.

Si le point donné M tomboit sur le point A, les lignes FM, FN, FP seroient égales chacune à FA, comme aussi les droites FK, FH; & partant on auroit en ce cas $FT = \frac{x^4}{3x^3} = \frac{1}{3}x$, c'est-à-dire que si l'on prend $FT = \frac{1}{3}AF$ & qu'on mene la ligne AT, elle sera tangente en A.

On peut encore trouver les tangentes de la Cissoïde par le moyen de la premiere Proposition, en menant les perpendiculaires NE, ML sur le diametre FB, & cherchant

l'équation qui exprime le rapport de la coupée FL à l'appliquée LM; ce qui se fait ainsi. Ayant nommé les connues FB, $2a$; FL ou BE, x; LM, y; les triangles semblables FEN, FLM, & la propriété du cercle donneront $FL(x).LM(y)::FE.EN::EN(\sqrt{2ax-xx}).EB$ (x). D'où l'on tire $yy=\frac{x^3}{2a-x}$, dont la différence est $2ydy$

* Art. 9. $=\frac{6axxdx-2x^3dx}{\overline{2a-x}^2}$. Et partant LO* $\left(\frac{ydx}{dy}\right)=\frac{yy\times\overline{2a-x}^2}{3axx-x^3}=\frac{2ax-xx}{3a-x}$, en mettant pour yy sa valeur $\frac{x^3}{2a-x}$.

PROPOSITION IX.

Problême.

Fig. 15. 29. *Soient deux lignes courbes* ANB, CPD, *& une ligne droite* FKT, *sur lesquelles soient marqués des points fixes* A, C, F; *soit de plus une autre ligne courbe* EMG *telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques* M *la droite* FMN, *&* MP *parallele à* FK; *la relation de l'arc* AN *à l'arc* CP *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *sur la courbe* EG *mener la tangente* MT.

Ayant mené par le point cherché T la ligne TH parallele à FM, & par le point donné M les droites MRK MOH paralleles aux tangentes en P & en N, on tirera $FmOn$ infiniment proche de FMN & mRp parallele à MP.

Cela posé, si l'on nomme les connues FM, s; FN, t; MK, u; CP, x; AN, y; (donc Pp ou $MR=dx$, $Nn=dy$) les triangles semblables FNn & FMO, MOm & MHT, MRm & MKT donneront $FN(t).FM(s)::Nn(dy).MO=\frac{sdy}{t}$. Et $MR(dx).MO\left(\frac{sdy}{t}\right)::MK(u).MH=\frac{sudy}{tdx}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée l'on aura une valeur de dy en termes qui

seront

ſeront tous affectés par dx, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{sudy}{tdx}$, les dx ſe détruiront ; & partant la valeur de MH ſera exprimée en termes entiérement connus. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée MH parallele à la touchante en N & égale à la valeur que l'on vient de trouver : ſoit tirée HT parallele à FM, qui rencontre en T la droite FK, par où & par le point donné M ſoit menée la tangente cherchée MT.

EXEMPLE.

30. Si l'on veut que la courbe ANB ſoit un quart de cercle qui ait pour centre le point fixe F, que la courbe CPD ſoit le rayon APF perpendiculaire ſur la droite $FKGQTB$, & que l'arc AN (y) ſoit toujours à la droite AP (x) comme le quart de cercle ANB (b) au rayon AF (a) ; la courbe EMG deviendra la Quadratrice AMG de *Dinoſtrate*, & l'on aura $MH\left(\frac{sudy}{tdx}\right) = \frac{asdy - sxdy}{adx}$, puiſque FP ou MK (u) $= a - x$, & FN (t) $= a$. Mais l'analogie ſuppoſée donne $ay = bx$, & $ady = bdx$. Mettant donc dans la valeur de MH à la place de x & de dy leurs valeurs $\frac{ay}{b}$ & $\frac{bdx}{a}$, on trouvera $MH = \frac{bs - ys}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction. Fig. 16.

Soit menée MH perpendiculaire ſur FM, & égale à l'arc MQ décrit du centre F, & ſoit tirée HT parallele à FM ; je dis que la ligne MT ſera tangente en M. Car à cauſe des ſecteurs ſemblables FNB, FMQ, l'on aura $FN(a).FM(s)::NB(b-y).MQ = \frac{bs - sy}{a}$.

Soit un quart de cercle ANB dont le centre eſt F ; ſi l'on conçoit que le rayon FA ſe meuve uniformément autour du centre F juſqu'à ce qu'il arrive en FB, & que pendant ce temps-là une perpendiculaire MP au rayon FA, allant de A vers F, parcoure auſſi uniformément le rayon AF ; l'interſection M du rayon FA qui devient FN, & de la

perpendiculaire PM, sera à une courbe AMG qui est la quadratrice dont il s'agit. En effet, il suit de la construction précédente que $ANB : AN :: AF : AP$.

COROLLAIRE.

FIG. 17. 31. Si l'on veut déterminer le point G où la quadratrice AMG rencontre le rayon FB, on imaginera un autre rayon Fgb infiniment proche de FGB; & en menant gf parallele à FB, la propriété de la quadratrice & les triangles semblables FBb, gfF, rectangles en B & en f, donneront $AB. AF :: Bb. Ff :: FB$ ou $AF. gf$ ou FG. D'où l'on voit que si l'on prend une troisieme proportionnelle au quart de cercle AB & au rayon AF, elle sera égale à FG, c'est-à-dire que $FG = \frac{aa}{b}$. Ce qui donne lieu d'abréger la construction des tangentes.

FIG. 16. Car menant TE parallele à MH, les triangles semblables FMK, FTE donneront $MK\ (a - x).\ MF\ (s) :: ET$ ou $MH\ \left(\frac{bs - sy}{a}\right).\ FT = \frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$. En mettant pour x sa valeur $\frac{ay}{b}$, & divisant ensuite le tout par $b - y$; d'où il est clair que la ligne FT est troisieme proportionnelle à FG & à FM.

PROPOSITION X.

Problême.

FIG. 18. 32. *Soit une ligne courbe* AMB *telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques* M *aux foyers* F, G, H, *&c. les droites* MF, MG, MH, *&c. leur relation soit exprimée par une équation quelconque: & soit proposé de mener du point donné* M *la perpendiculaire* MP *sur la tangente en ce point.*

Ayant pris sur la courbe AB l'arc Mm infiniment petit, & mené les droites FRm, GmS, HmO, on décrira des centres F, G, H les petits arcs de cercles MR, MS, MO; ensuite du centre M & d'un intervalle quelconque on décrira de

même le cercle *CDE* qui coupe les lignes *MF*, *MG*, *MH* aux points *C*, *D*, *E*, d'où l'on abaiſſera ſur *MP* les perpendiculaires *CL*, *DK*, *EI*. Cette préparation étant faite, je remarque

1°. Que les triangles rectangles *MRm*, *MLC* ſont ſemblables ; car en ôtant des angles droits *LMm*, *RMC* l'angle commun *LMR*, les reſtes *RMm*, *LMC* ſeront égaux, & de plus ils ſont rectangles en *R* & *L*. On prouvera de même que les triangles rectangles *MSm* & *MKD*, *MOm* & *MIE* ſont ſemblables. Partant, puiſque l'ypothenuſe *Mm* eſt commune aux petits triangles *MRm*, *MSm*, *MOm*, & que les hypothenuſes *MC*, *MD*, *ME* des triangles *MLC*, *MKD*, *MIE* ſont égales entre elles ; il s'enſuit que les perpendiculaires *CL*, *DK*, *EI* ont le même rapport entre elles que les différences *Rm*, *Sm*, *Om*.

2°. Que les lignes qui partent des foyers ſitués du même côté de la perpendiculaire *MP* croiſſent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure 18. *FM* croît de ſa différence *Rm*, pendant que les autres *GM*, *HM* diminuent des leurs *Sm*, *Om*.

Si l'on ſuppoſe à préſent, pour fixer ſes idées, que l'équation qui exprime la relation des droites *FM* (x), *GM* (y), *HM* (z), ſoit $ax + xy - zz = o$, dont la différence eſt $adx + ydx + xdy - 2zdz = o$; Il eſt évident que la tangente en *M* (qui n'eſt autre choſe que la continuation du petit côté *Mm* du poligone que l'on conçoit* compoſer la courbe *AMB*) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ſes points quelconques *m* des paralleles *mR*, *mS*, *mO* aux droites *FM*, *GM*, *HM*, terminées en *R*, *S*, *O* par des perpendiculaires *MR*, *MS*, *MO* à ces mêmes droites, on ait toujours l'équation $\overline{a+y} \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = o$: ou (ce qui revient au même, en mettant à la place de *Rm*, *Sm*, *Om*, leurs proportionnelles *CL*, *DK*, *EI*) que la perpendiculaire *MP* à la courbe doit être placée enſorte que $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = o$. Ce qui donne cette construction.

* *Art.* 3.

Fig. 18. 19. Que l'on conçoive que le point C ſoit chargé du poids $a+y$ qui multiplie la différence dx de la droite FM ſur laquelle il eſt ſitué, & de même le point D du poids x, & le point E pris de l'autre côté de M par rapport au foyer H (parceque le terme $-2zdz$ eſt négatif) du poids $2z$. Je dis que la droite MP qui paſſe par le commun centre de peſanteur des poids ſuppoſés en C, D, E, ſera la perpendiculaire requiſe. Car il eſt clair par les principes de la Mécanique, que toute ligne droite, qui paſſe par le centre de peſanteur de pluſieurs poids les ſépare enſorte que les poids d'une part multipliés chacun par ſa diſtance de cette droite, ſont préciſément égaux aux poids de l'autre part multipliés auſſi chacun par ſa diſtance de cette même droite. Donc poſant le cas que x croiſſant, y & z croiſſent auſſi, c'eſt-à-dire que les foyers
Fig. 19. F, G, H, tombent du même côté de MP, comme l'on ſuppoſe toujours en prenant la différence de l'équation donnée ſelon les regles preſcrites; il s'enſuit que la ligne MP laiſſera d'une part les poids en C & D, & de l'autre le poids en E, & qu'ainſi l'on aura $a+y \times CL + x \times DK - 2z \times EI = o$, qui étoit l'équation à conſtruire.

Or je dis maintenant que puiſque la conſtruction eſt bonne dans ce cas, elle le ſera auſſi dans tous les autres; car ſuppoſant, par exemple, que le point M change de ſituation
Fig. 18. dans la courbe en ſorte que x croiſſant, y & z diminuent, c'eſt-à-dire que les foyers G, H paſſent de l'autre côté de
* Art. 8. MP, il s'enſuit 1°. * Qu'il faut changer dans la différence de l'équation donnée les ſignes des termes affectés par dy, dz, ou par leurs proportionnelles DK, EI; de ſorte que l'équation à conſtruire ſera dans ce nouveau cas $a+y \times CL - x \times DK + 2z \times EI = o$. 2°. Que les poids en D & E changeront de côté par rapport à MP, & qu'ainſi l'on aura par la propriété du centre de peſanteur $\overline{a+y} \times CL - x \times DK + 2z \times EI = o$, qui eſt l'équation à conſtruire. Et comme cela arrive toujours dans tous les cas poſſibles, il s'enſuit, &c.

Il eſt évident que le même raiſonnement ſubſiſtera toujours

tel que ſoit le nombre des foyers, & telle que puiſſe être l'équation donnée, de ſorte que l'on peut énoncer ainſi la conſtruction générale.

Soit priſe la différence de l'équation donnée dont je ſuppoſe que l'un des membres ſoit zéro, & ſoit décrit à diſcrétion du centre *M* un cercle *CDE* qui coupe les droites *MF*, *MG*, *MH* aux points *C*, *D*, *E*, dans leſquels ſoient conçus des poids qui aient entre eux le même rapport que les quantités qui multiplient les différences des lignes ſur leſquelles ils ſont ſitués. Je dis que la ligne *MP* qui paſſe par leur commun centre de peſanteur, ſera la perpendiculaire requiſe. Il eſt à remarquer que ſi l'un des poids eſt négatif dans la différence de l'équation donnée, il le faut concevoir de l'autre côté du point *M* par rapport au foyer.

Si l'on veut que les foyers *F*, *G*, *H* ſoient des lignes droites ou courbes ſur qui les droites *MF*, *MG*, *MH* tombent à angles droits, la même conſtruction aura toujours lieu. Car menant du point *m* pris infiniment près de *M* les perpendiculaires *mf*, *mg*, *mh* ſur les foyers, & du point *M* les petites perpendiculaires *MR*, *MS*, *MO* ſur ces lignes; il eſt clair que *Rm* ſera la différence de *MF*, puiſque les droites *MF*, *Rf* étant perpendiculaires entre les paralleles *Ff*, *MR*, elles ſeront égales, & de même que *Sm* eſt la différence de *MG*, & *Om* celle de *MH*; & on prouvera enſuite tout le reſte comme ci-deſſus. FIG. 20.

On peut encore concevoir que les foyers *F*, *G*, *H* ſoient tous ou en partie des lignes courbes qui aient des commencements fixes & invariables aux points *F*, *G*, *H*, & que la ligne courbe *AMB* ſoit telle qu'ayant mené, par exemple, d'un de ſes points quelconques *M* les tangentes *MV*, *MX* & la droite *MG*; la relation des lignes mixtilignes *FVM*, *HXM* & de la droite *GM* ſoit exprimée par une équation quelconque. Car ayant mené du point *m* pris infiniment près de *M* la tangente *mu*, il eſt clair qu'elle rencontrera l'autre tangente au point *V* (puiſqu'elle n'eſt que la continuation du petit arc *Vu* conſidéré comme une petite droite), & partant que ſi l'on décrit du centre *V* le petit arc de cercle FIG. 21.

MR; Rm ſera la différence de la ligne mixtiligne FVM qui devient $FVuRm$. Et tout le reſte ſe démontrera comme ci-devant.

M. Tſchirnhaus *a donné la premiere idée de ce Problême dans ſon livre de la Médecine de l'eſprit*; M. Fatio *en a trouvé enſuite une ſolution très ingénieuſe qu'il a fait inſérer dans les Journaux d'Hollande : mais la maniere dont ils l'ont conçu, n'eſt qu'un cas particulier de la conſtruction générale que je viens de donner.*

EXEMPLE I.

33. Soit $axx + byy + czz - f^3 = o$ (les droites a, b, c, f ſont données) dont la différence eſt $axdx + bydy + czdz$
Fig. 22. $= o$. C'eſt pourquoi concevant en C le poids ax, en D le poids by, & en E le poids cz, c'eſt-à-dire des poids qui ſoient entre eux comme ces rectangles; la ligne MP qui paſſe par leur commun centre de peſanteur, ſera perpendiculaire à la courbe au point M.

Mais ſi l'on mene FO parallele à CL, & que l'on prenne le rayon MC pour l'unité, les triangles ſemblables MCL, MFO donneront $FO = x \times CL$; & de même menant GR parallele à DK, & HS parallele à EI, on trouvera que $GR = y \times DK$ & $HS = z \times EI$: de ſorte qu'en imaginant aux foyers F, G, H les poids a, b, c; la ligne MP qui paſſe par le centre de peſanteur des poids ax, by, cz ſuppoſés en C, D, E, paſſera auſſi par le centre de peſanteur de ces nouveaux poids. Or ce centre eſt un point fixe, puiſque les poids en F, G, H, ſavoir a, b, c, ſont des droites conſtantes qui demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que ſe trouve le point M. D'où il ſuit que la courbe AMB doit être telle que toutes ſes perpendiculaires ſe coupent dans le même point, c'eſt-à-dire qu'elle ſera un cercle qui aura pour centre ce point. Voici donc une propriété très remarquable du cercle que l'on peut énoncer ainſi.

S'il y a ſur un même plan autant de poids a, b, c, &c. que l'on voudra, ſitués en F, G, H, &c. & que l'on décrive de

leur commun centre de pesanteur un cercle *AMB*; je dis qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M*, les droites *MF*, *MG*, *MH*, &c. la somme de leurs quarrés multipliés chacun par le poids qui lui répond, sera toujours égale à une même quantité.

EXEMPLE II.

34. Soit la courbe *AMB* telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques *M* au foyers *F* qui est un point fixe la droite *MF*, & au foyer *G* qui est une ligne droite la perpendiculaire *MG*; le rapport de *MF* à *MG* soit toujours le même que de la donnée *a* à la donnée *b*. FIG. 23.

Ayant nommé *FM*, x; *MG*, y; on aura $x . y :: a . b$, & partant $ay = bx$ dont la différence est $ady - bdx = o$. C'est pourquoi concevant en *C* pris au-delà de *M* par rapport à *F* le poids *b*, & en *D* (à pareille distance de M) le poids *a*, & menant par leur centre commun de pesanteur la ligne *MP*; elle sera la perpendiculaire requise.

Il est clair par le principe de la balance, que si l'on divise la corde *CD* au point *P* ensorte que *CP.DP :: a . b*; le point *P* sera le centre commun de pesanteur des poids supposés en *C* & *D*.

La courbe *AMB* est une Section conique, savoir une Parabole lorsque $a = b$, une Hyperbole lorsque *a* surpasse *b*, & enfin une Ellipse lorsqu'il est moindre.

EXEMPLE III.

35. Si après avoir attaché les extrémités d'un fil *FZVMGMXYH* en *F* & en *H*, & avoir fiché une petite pointe en *G*, on fait tendre également ce fil par le moyen d'un style placé en *M*, ensorte que les parties *FZV*, *HYX* soient roulées autour des courbes qui ont leur origine en *F* & *H*, que la partie *MG* soit double, c'est-à-dire qu'elle soit repliée en *G*, & que les choses demeurant en cet état l'on fasse mouvoir le style *M*; il est clair qu'il décrira une courbe *AMB*. Il est question de mener d'un point donné *M* sur cette courbe la perpendiculaire *MP*, la posi- FIG. 24.

tion du fil qui sert à la décrire étant donnée en ce point.

Je remarque que les parties droites MV, MX du fil sont toujours tangentes en V & X, & que si l'on nomme les lignes mixtilignes $FZVM$, x; $HYXM$, z; la droite MG, y; & une ligne droite prise égale à la longueur du fil, a; l'on aura toujours $x + 2y + z = a$: d'où je connois que la courbe AMB est comprise dans la construction générale. C'est pourquoi prenant la différence $dx + 2dy + dz = o$, & concevant en C le poids 1, en D le poids 2, & en E le poids 1, je dis que la ligne MP, qui passe par le centre commun de pesanteur de ces poids, sera la perpendiculaire requise.

PROPOSITION XI.

Problême.

FIG. 25. 36. *Soient deux lignes quelconques* APB, EQF *dont l'on sache mener les tangentes* PG, QH; *& soit une ligne droite* PQ *sur laquelle soit marqué un point* M. *Si l'on conçoit que les extrémités* P, Q *de cette droite glissent le long des lignes* AB, EF, *il est clair que le point* M *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CD. *Il est question de mener d'un point donné* M *sur cette courbe la tangente* MT.

Ayant imaginé que la droite mobile PMQ soit parvenue dans la situation infiniment proche pmq, on tirera les petites droites PO, MR, QS perpendiculaires sur PQ, ce qui formera les petits triangles rectangles pOP, mRM, qSQ; & ayant pris PK égale à MQ, on menera la droite HKG perpendiculaire sur PQ, & l'on prolongera OP en T, où je suppose qu'elle rencontre la tangente cherchée MT. Cela posé, il est clair que les petites droites Op, Rm, Sq seront égales entre elles, puisque par la construction PM & MQ sont par-tout les mêmes.

Ayant nommé les connues PM ou QK, a; MQ ou PK, b; KG, f; KH, g; & la petite droite Op ou Rm ou Sq, dy; les triangles semblables PKG & pOP, QKH & qSQ donneront $PK\,(b) . KG\,(f) :: pO\,(dy) . OP = \frac{fdy}{b}$. Et $QK\,(a) . KH\,(g) :: qS\,(dy) . SQ = \frac{gdy}{a}$.

Or

Or l'on ſait par la Géometrie commune que $MR = \frac{OP \times MQ + QS \times PM}{PQ} = \frac{fdy + gdy}{a+b}$. Ainſi les triangles ſemblables mRM, MPT donneront $mR\ (dy) . RM\ \frac{fdy+gdy}{a+b} :: MP\ (a) . PT = \frac{af+ag}{a+b}$. Ce qu'il falloit trouver.

Imaginons que les lignes QP, SO, prolongées, ſe rencontrent en un point Z, que je ne marque pas dans la figure. A cauſe des paralleles PO, MR, QS, nous aurons les proportions $MP : PZ :: MR - PO : PO$, $QP : PZ :: QS - PO : PO$; &, diviſant la premiere par la ſeconde, $\frac{MP}{QP} = \frac{MR - PO}{QS - PO}$, & par conſéquent $MR = \frac{OP(PQ - MP) + MP . QS}{PQ} = \frac{OP . MQ + QS . PM}{PQ}$.

PROPOSITION XII.

Problême.

37. *Soient deux lignes quelconques* BN, FQ *qui aient pour axes les droites* BC, ED *qui s'entre-coupent à angles droits au point* A; *& ſoit une ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* M *les droites* MGQ, MPN *paralleles à* AB, AE; *la relation des eſpaces* EGQF, (*le point* E *eſt un point fixe donné ſur la droite* AE, *& la ligne* EF *eſt parallele à* AC) APND, *& des droites* AP, PM, PN, GQ, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il eſt queſtion de mener d'un point donné* M *ſur la courbe* LM, *la tangente* MT. Fig. 26.

Ayant nommé les données & variables AP ou GM, x; PM ou AG, y; PN, u; GQ, z; l'eſpace $EGQF$, s; l'eſpace $APND$, t; & les ſous-tangentes données PH, a; GK, b; l'on aura Pp ou NS ou $MR = dx$, Gg ou Rm ou $OQ = -dy$; $Sn = -du = \frac{udx}{a}$ à cauſe des triangles ſemblables HPN, NSn; $Oq = dz = -\frac{zdy}{b}$, $NPpn$

$= dt = udx$, & $QGgq = ds = -zdy$; où l'on doit obſerver que les valeurs de Rm & Sn ſont négatives, parceque $AP\,(x)$ croiſſant, $PM\,(y)$ & $PN\,(u)$ diminuent. Cela poſé, on prendra la différence de l'équation donnée, dans laquelle on mettra à la place de dt, ds, du, dz leurs valeurs udx, $-zdy$, $-\frac{udx}{a}$, $-\frac{zdy}{b}$; ce qui donnera une nouvelle équation qui exprimera le rapport cherché de dy à dx, ou de MP à PT.

EXEMPLE I.

38. Soit $s + zz = t + ux$, on aura en prenant les différences $ds + 2zdz = dt + udx + xdu$, & mettant à la place de ds, dt, dz, du leurs valeurs, on trouvera $-zdy - \frac{2zzdy}{b} = 2udx - \frac{uxdx}{a}$, d'où l'on tire $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayzz + aybz}{bux - 2abu}$.

EXEMPLE II.

39. Soit $s = t$, donc $ds = dt$, c'eſt-à-dire $-zdy = udx$; & partant $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = -\frac{yz}{u}$. Or comme cette

* *Art.* 10. quantité eſt négative, il s'enſuit * que l'on doit prendre le point T du côté oppoſé au point A origine des x. Si l'on ſuppoſe que la ligne FQ ſoit une hyperbole qui ait pour aſymptotes les droites AC, AE, enſorte que $GQ\,(z) = \frac{cc}{y}$, & que la ligne BND ſoit une droite parallele à AB, de maniere que $PN\,(u)$ ſoit par-tout égale à la droite donnée c; il eſt clair que la courbe LM a pour aſymptote la droite AB, & que ſa ſous-tangente $PT\left(-\frac{yz}{u}\right) = -c$: c'eſt-à dire qu'elle demeure par-tout la même.

*Note 2, n°. 3. La courbe LM eſt appellée dans ce cas *Logarithmique*.

PROPOSITION XIII.

Problême.

40. *Soient deux lignes quelconques* BN, FQ *qui aient pour axe la même droite* BA, *ſur laquelle ſoient marqués deux points fixes* A, E; *ſoit une troiſieme ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené par un de ſes points quelconques* M *la droite* AN, *décrit du centre* A *l'arc de cercle* MG, *& tiré* GQ *parallele à* EF *perpendiculaire ſur* AB; *la relation des eſpaces* EGQF (s), ANB (t), *& des droites* AM *ou* AG (y), AN (z), GQ (u), *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut mener d'un point donné* M *ſur la courbe* LM *la tangente* MT. Fig. 27.

Après avoir mené la droite ATH perpendiculaire ſur AMN, ſoit imaginée une autre droite Amn infiniment proche de AMN, un autre arc mg, une autre perpendiculaire gq; & décrit du centre A le petit arc NS: on nommera les ſous-tangentes données AH, a; GK, b; & on aura Rm ou $Gg = dy$, $Sn = dz$; les triangles ſemblables HAN & NSn, KGQ & QOq, donneront auſſi $SN = \frac{adz}{z}$, $Oq = -du = \frac{udy}{b}$, $GQqg = -ds = udy$, ANn ou $AN \times \frac{1}{2} NS = -dt = \frac{1}{2} adz$. On mettra toutes ces valeurs dans la différence de l'équation donnée, & l'on en formera une nouvelle, d'où l'on tirera une valeur de dz en dy. Or, à cauſe des ſecteurs & des triangles ſemblables ANS & AMR, mRM & MAT, on trouve $AN(z) . AM(y) :: NS \left(\frac{adz}{z}\right) . MR = \frac{aydz}{zz}$. Et mR $(dy) . RM \left(\frac{aydz}{zz}\right) :: AM(y) . AT = \frac{ayydz}{zzdy}$. Si donc l'on met dans cette formule à la place de dz ſa valeur en dy, les différences ſe détruiront, & la valeur de la ſoustangente cherchée AT ſera exprimée en termes entiérement connus. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

41. Soit $uy - s = zz - t$, dont la différence est $udy + ydu - ds = 2zdz - dt$, ce qui donne (après la substitution faite) $dz = \frac{4budy - 2uydy}{4bz + ab}$; & en mettant cette valeur dans $\frac{ayydz}{zzdy}$, on trouve $AT = \frac{4abuyy - 2auy^3}{4bz^3 + abzz}$.

EXEMPLE II.

42. Soit $s = 2t$, donc $ds = 2dt$, c'est-à-dire $-udy = -adz$, ou $dz = \frac{udy}{a}$; & partant $AT \left(\frac{ayydz}{zzdy}\right) = \frac{uyy}{zz}$.

Si la ligne BN est un cercle qui ait pour centre le point A, & pour rayon la droite $AB = AN = c$, & que FQ soit une hyperbole telle que $GQ\ (u) = \frac{ff}{y}$; il est clair que la courbe LM fait une infinité de retours autour du centre A avant que d'y parvenir (puisque l'espace $FEGQ$ devient infini lorsque le point G tombe en A), & que $AT = \frac{ffy}{cc}$. D'où l'on voit que la raison de AM à AT est constante; & partant que l'angle AMT est par-tout le même.

La courbe LM est appellée en ce cas *Logarithmique spirale.*

On demande l'équation de la courbe LM, dont la tangente MT feroit toujours un angle constant avec le rayon AN. Imaginons qu'on ait abaissé du point M sur AB une ordonnée perpendiculaire Y; nommons de plus X l'abcisse correspondante prise du point A, β l'angle NAB, S l'arc LM. Le supplément de l'angle AMT est la somme de deux angles, dont l'un est le complément de β, & l'autre (Note 2, n°. 1) a pour sinus & cosinus $-\frac{dX}{ds}$ & $\frac{dY}{ds}$; donc $\textit{sin.}\, AMT = \frac{dY \textit{cos.}\, \beta - dX \textit{sin.}\, \beta}{dS}$. Mais le rayon étant pris pour l'unité, $Y = y\, \textit{sin.}\, \beta$, $X = y\, \textit{cos.}\, \beta$, $dS = \sqrt{dy^2 + y^2 d\beta^2}$; donc $\textit{sin.}\, AMT = \frac{y\, d\beta}{\sqrt{dy^2 + y^2 d\beta^2}}$; & comme ce

ſinus doit être une quantité conſtante, on aura l'équation $y\,d\zeta = g\sqrt{dy^2 + y^2 d\zeta^2}$, ou $y^2\,d\zeta^2 = \frac{g^2\,dy^2}{1-g^2}$, ou même encore, en faiſant pour ſimplifier $\sqrt{\frac{g^2}{1-g^2}} = \frac{f^2}{c}$, $c\,d\zeta = f^2\,\frac{dy}{y}$; c'eſt-à-dire qu'on aura l'eſpace circulaire *BAN* proportionnel à l'eſpace hyperbolique *GQFE*. On peut encore tirer de la même équation différentielle $c\,\zeta = f^2\,log.\frac{y}{m}$ (Note 2, n°. 4); on voit donc que la courbe *LM*, qui fait une infinité de tours autour du centre *A*, eſt conſtructible par la logarithmique. Ce ſont ces deux propriétés qui lui ont fait donner le nom de ſpirale logarithmique.

PROPOSITION XIV.

Théorême.

43. *Soient ſur un même plan deux courbes quelconques* AMD, BMC *qui ſe touchent en un point* M, *& ſoit ſur le plan de la courbe* BMC *un point fixe* L. *Si l'on conçoit à préſent que la courbe* BMC *roule ſur la courbe* AMD *en s'y appliquant continuellement enſorte que les parties révolues* AM, BM *ſoient toujours égales entre elles; il eſt viſible que le plan* BMC *emportant le point* L, *ce point décrira dans ce mouvement une eſpece de roulette* ILK. *Cela poſé, je dis que ſi l'on mene dans chaque différente poſition de la courbe* BMC (*du point décrivant* L *au point touchant* M) *la droite* LM; *elle ſera perpendiculaire à la courbe* ILK. FIG. 28.

Car imaginant ſur les deux courbes *AMD*, *BMC* deux parties *Mm*, *Mm* égales entre elles & infiniment petites, on les pourra conſiderer * comme deux petites droites qui font au point *M* un angle infiniment petit. Or afin que le petit côté *Mm* de la courbe ou poligone *BMC* tombe ſur le petit côté *Mm* du poligone *AMD*, il faut que le point *L* décrive autour du point touchant *M* comme centre un petit arc *Ll*. Il eſt donc évident que ce petit arc fera partie de la courbe *ILK*; & par conſéquent que la droite *ML*, * *Art. 3.*

qui lui eſt perpendiculaire, ſera auſſi perpendiculaire ſur la courbe *ILK* au point *L*. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XV.

Problême.

Fig. 29. 44. *Soit un angle rectiligne quelconque* MLN, *dont les côtés* LM, LN *touchent deux courbes quelconques* AM, BN. *Si l'on fait gliſſer ces côtés autour de ces courbes, enſorte qu'ils les touchent continuellement; il eſt clair que le ſommet* L *décrira dans ce mouvement une courbe* ILK. *Il eſt queſtion de mener une perpendiculaire* LC *ſur cette courbe, la poſition de l'angle* MLN *étant donnée.*

Soit décrit un cercle qui paſſe par le ſommet *L*, & par les points touchants *M*, *N*; ſoit menée par le centre *C* de ce cercle la droite *CL*: je dis qu'elle ſera perpendiculaire à la courbe *ILK*.

Car conſidérant les courbes *AM*, *BN* comme des poligones d'une infinité de côtés tels que *Mm*, *Nn*; il eſt évident que ſi l'on fait gliſſer les côtés *LM*, *LN* de l'angle rectiligne *MLN*, qu'on ſuppoſe demeurer toujours le même, autour des points fixes *M*, *N*, (on conſidere les tangentes *LM*, *LN* comme la continuation des petits côtés *Mf*, *Ng*) juſqu'à ce que le côté *LM* de l'angle tombe ſur le petit côté *Mm* du poligone *AM*, & l'autre côté *LN* ſur le petit côté *Nn* du poligone *BN*; le ſommet *L* décrira une petite partie *Ll* de l'arc de cercle *MLN*, puiſque par la conſtruction cet arc eſt capable de l'angle donné *MLN*. Cette petite partie *Ll* ſera donc commune à la courbe *ILK*; & par conſéquent la droite *CL*, qui lui eſt perpendiculaire, ſera auſſi perpendiculaire ſur cette courbe au point *L*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

Problême.

Fig. 30. 45. *Soit* ABCD *une corde parfaitement flexible, à la-*

quelle soient attachés différens poids A, B, C, *&c. qui aient entre eux tels intervalles* AB, BC, *&c. que l'on voudra. Si l'on traîne cette corde sur un plan horizontal par l'extrémité* D, *le long d'une courbe donnée* DP; *il est clair que ces poids se disposeront ensorte qu'ils feront tendre la corde, & qu'ils décriront ensuite des courbes* AM, BN, CO, *&c. On demande la maniere d'en tirer les tangentes, la position de la corde* ABCD *étant donnée avec la grandeur des poids.*

Dans le premier instant que l'extrémité *D* avance vers *P*, les poids *A*, *B*, *C* décrivent ou tendent à décrire autant de petits côtés *Aa*, *Bb*, *Cc* des poligones qui composent les courbes *AM*, *BN*, *CO*; & par conséquent il ne faut pour en mener les tangentes *AB*, *BG*, *CK*, que déterminer la direction des poids *A*, *B*, *C* dans ce premier instant, c'est-à-dire la position des droites qu'ils tendent à décrire. Pour la trouver, je remarque

1°. Que le poids *A* est tiré dans ce premier instant suivant la direction *AB*, & comme il n'y a aucun obstacle qui s'oppose à cette direction, puisqu'il ne traîne après lui aucun poids, il la doit suivre; & partant la droite *AB* sera la tangente en *A* de la courbe *AM*.

2°. Que le poids *B* est tiré suivant la direction *BC*; mais parcequ'il traîne après lui le poids *A* qui n'est pas dans cette direction, & qui doit par conséquent y apporter quelque changement, le poids *B* n'aura pas sa direction suivant *BC*, mais suivant une autre droite *BG*, dont il faut trouver la position. Ce que je fais ainsi.

Je décris sur *BC* comme diagonale le rectangle *EF*, dont le côté *BF* est sur *AB* prolongée, & supposant que la force avec laquelle le poids *B* est tiré suivant *BC*, s'exprime par *BC*; il est visible par les regles de la Mécanique, que cette force *BC* se peut partager en deux autres *BE* & *BF*, c'est-à-dire que le poids *B* étant tiré suivant la direction *BC* par la force *BC*, c'est la même chose que s'il étoit tiré en même temps par la force *BE* suivant la direction *BE*, & par la force *BF* suivant la direction *BF*. Or le poids *A* ne s'oppose point à la direction *BE*, puisqu'elle lui est perpendiculaire; & par conséquent la force *BE* sui-

vant cette direction demeure toute entiere : mais il s'oppose avec toute sa pesanteur à la direction BF. Afin donc que le poids B avec la force BF vainque la résistance du poids A, il faut que cette force se distribue dans ces poids à proportion de leurs masses ou grandeurs : c'est pourquoi si l'on divise EC au point G, ensorte que CG soit à GE comme le poids A au poids B ; il est clair que EG exprimera la force restante avec laquelle le poids B tend à se mouvoir suivant la direction BF, après avoir vaincu la résistance du poids A. Il est donc évident que le poids B est tiré en même temps par la force BE suivant la direction BE, & par la force EG suivant la direction BF ou EC ; & partant qu'il tendra à aller par BG avec la force BG : c'est-à-dire que BG sera sa direction, & par conséquent tangente en B de la courbe BN.

3°. Pour avoir la tangente CK, je forme sur CD comme diagonale le rectangle HI, dont le côté CI est sur BC prolongée ; & je vois que le poids B ne résiste point à la force CH avec laquelle le poids C est tiré suivant la direction CH, mais bien à la force CI avec laquelle il est tiré suivant la direction CI, & de plus que le poids A résiste aussi à cette force. Pour savoir de combien, je tire AL perpendiculaire sur CB prolongée du côté de B, & je remarque que si AB exprime la force avec laquelle le poids A est tiré suivant la direction AB, BL exprimera celle avec laquelle ce même poids A est tiré suivant la direction BC ; de sorte que le poids C avec la force CI doit vaincre le poids entier B, & de plus une partie du poids A qui est à ce poids A comme BL est à BA, ou BF à BC. Si donc l'on fait $B + \frac{A \times BF}{BC} . C :: DK . KH$, il est clair que CK sera la direction du poids C, & par conséquent la tangente en C de la troisieme courbe CO.

Si le nombre des courbes étoit plus grand, on trouveroit de la même maniere la tangente de la quatrieme, cinquieme, &c. Et si l'on vouloit avoir les tangentes des courbes décrites par les points moyens entre les poids, on les trouveroit par l'art 36.

SECTION

SECTION III.

Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De Maximis & minimis.

DÉFINITION I.

SOIT une ligne courbe *MDM* dont les appliquées *PM*, *ED*, *PM* soient paralleles entre elles ; & qui soit telle que la coupée *AP* croissant continuellement, l'appliquée *PM* croisse aussi jusqu'à un certain point *E*, après lequel elle diminue ; ou au contraire qu'elle diminue jusqu'à un certain point *E*, après lequel elle croisse. Cela posé, Fig. 31. 32. 33. 34.

La ligne *ED* sera nommée *la plus grande*, ou *la moindre* appliquée.

DÉFINITION II.

Si l'on propose une quantité telle que *PM*, qui soit composée d'une ou de plusieurs indéterminées telles que *AP*, laquelle *AP* croissant continuellement, cette quantité *PM* croisse aussi jusqu'à un certain point *E*, après lequel elle diminue, ou au contraire ; & qu'il faille trouver pour *AP*, une valeur *AE* telle que la quantité *ED* qui en est composée, soit plus grande ou moindre que toute autre quantité *PM* semblablement formée de *AP*. Cela s'appelle une question *De maximis & minimis*.

PROPOSITION GÉNÉRALE.

46. *La nature de la ligne courbe* MDM *étant donnée ; trouver pour* AP *une valeur* AE *telle que l'appliquée* ED, *soit la plus grande ou la moindre de ses semblables* PM.

Lorsque *AP* croissant, *PM* croît aussi ; il est évident * que sa différence *Rm* sera positive par rapport à celle de

* *Art.* 8. 10.

AP; & qu'au contraire lorſque PM diminue, la coupée AP croiſſant toujours, ſa différence ſera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative, qu'elle ne paſſe par l'infini ou par le zéro; ſavoir, par le zéro lorſqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini, lorſqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il ſuit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zéro ou à l'infini. Or la nature de la courbe MDM étant
*Sect. 1 ou 2. donnée, on trouvera * une valeur de Rm, laquelle étant égalée d'abord à zéro, & enſuite à l'infini, ſervira à découvrir la valeur cherchée de AE dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions.

REMARQUE.

FIG. 31. 32. 47. La tangente en D eſt parallele à l'axe AB lorſque la différence Rm devient nulle dans ce point; mais lorſqu'elle devient infinie, la tangente ſe confond avec l'appliquée ED.
FIG. 33. 34. D'où l'on voit que la raiſon de mR à RM, qui exprime celle de l'appliquée à la ſous-tangente, eſt nulle ou infinie ſous le point D.

On conçoit aiſément qu'une quantité, qui diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative ſans paſſer par le zéro; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorſqu'elle augmente, elle doive paſſer par l'infini. C'eſt pourquoi, pour aider l'imagination, ſoient en-
FIG. 31. 32. tendues des tangentes aux points M, D, M; il eſt clair dans les courbes où la tangente en D eſt parallele à l'axe AB, que la ſous-tangente PT augmente continuellement à meſure que les points M, P approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorſque AP ſurpaſſe AE, la ſous-tangente
*Art. 10. PT devient * négative de poſitive qu'elle étoit, ou au contraire.

NOTE III.

1. Le rayon étant pris pour l'unité, $\frac{dy}{dx}$ eſt la tangente de l'angle que la droite MT fait avec la ligne des abciſſes,* & $\frac{dx}{dy}$ la tangente de l'angle que la même droite fait avec l'ordonnée. Il ſuit de là qu'au point où la tangente de la courbe eſt parallele à la ligne des abciſſes, on a $\frac{dy}{dx} = 0$; & $\frac{dx}{dy} = 0$ au point où la tangente eſt parallele aux ordonnées. Fig. 31. *Note 2, n°. 1.

Soit ADB une ellipſe dont je nomme le demi-grand axe AE, a, le demi-petit axe ED, b; on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ & $dy = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Pour trouver les points où la tangente TM devient parallele à la ligne des abciſſes, il faudra faire $\frac{dy}{dx}$ nul ou $a - x = 0$, ce qui donne $x = a$; il n'y a donc de tangentes paralleles à la ligne des abciſſes que celles qui paſſent par les extrémités du petit axe. En faiſant $\frac{dx}{dy}$ nul ou $2ax - x^2 = 0$, on trouvera celles qui ſont paralleles aux ordonnées; or l'équation précédente étant du ſecond degré, on a deux valeurs de x, o & $2a$, qui indiquent deux points où la tangente devient parallele à la ligne des ordonnées, & que ces points ſont les extrémités du grand axe.

Dans cet exemple aux points où la tangente devient parallele à la ligne des abciſſes, répondent deux ordonnées qui ſont les plus grandes de toutes les ordonnées au grand axe de l'ellipſe; & aux points où elle devient parallele aux ordonnées, répondent deux abciſſes, l'une $= 0$, qui eſt un *minimum*, l'autre $= 2a$, qui eſt un *maximum*. Toutes les fois qu'il y a un *maximum* ou un *minimum* d'abciſſes, la tangente eſt parallele aux ordonnées, & $\frac{dx}{dy}$ eſt nul; la tangente eſt parallele à la ligne des abciſſes & $\frac{dy}{dx}$ eſt nul, toutes les fois qu'il y a un *maximum* ou un *minimum* d'ordonnées. Mais l'inverſe de cette propoſition eſt-elle toujours vraie?

Cette queſtion mérite d'être examinée; ce que nous ferons lorſque nous aurons mis ſous une forme plus commode le théorême démontré Note 1, n°. 5.

2. Selon ce théorême, y étant l'ordonnée qui répond à l'abciſſe x, on a pour l'ordonnée Y, qui répond à l'abciſſe $x + n \Delta x$,

$$Y = y + n \Delta y + n . \frac{n-1}{2} \Delta^2 y + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} \Delta^3 y + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} \Delta^4 y + \&c.$$

On transformera cette formule en la ſuivante,

$$Y = y + n \Delta x \frac{\Delta y}{\Delta x} + n . \frac{n-1}{2} \Delta x^2 \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} \Delta x^3 \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} \Delta x^4 . \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} + \&c.$$

Mais on peut ſuppoſer que n augmente continuellement, tandis que Δx diminue, & cela de maniere que Δx devenant nul, $n \Delta x$ devienne $\frac{0}{0}$, quantité indéterminée que nous déſignerons plus ſimplement par q. De plus, lorſque Δx devient nul, les rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, &c. (N. 1, n°. 10.) deviennent $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, &c.; & les quantités $n . \frac{n-1}{2} \Delta x^2 = \frac{n^2 \Delta x^2}{2} - \frac{n \Delta x}{2} \Delta x$, $n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} \Delta x^3 = \frac{n^3 \Delta x^3}{2 . 3} - \frac{n^2 \Delta x^2}{2} \Delta x + \frac{n \Delta x}{3} \Delta x^2$, &c. ſe changent en $\frac{q^2}{2}$, $\frac{q^3}{2 . 3}$, &c. Or comme notre formule doit être vraie, quelle que ſoit la valeur de Δx; il ſuit de ce qui précede que ſi Y déſigne ce que devient y lorſque x ſe change en $x + q$, on doit avoir

$$Y = y + q \frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{1 . 2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{q^3}{1 . 2 . 3} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{q^4}{1 . 2 . 3 . 4} \frac{d^4 y}{dx^4} + \&c.$$

On en tirera aiſément que ſi Z déſigne ce que devient y lorſque x ſe change en $x - q$, on doit avoir

$$Z = y - q \frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{1 . 2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{q^3}{1 . 2 . 3} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{q^4}{1 . 2 . 3 . 4} \frac{d^4 y}{dx^4} - \&c.$$

3. Si l'ordonnée y eſt un plus grand ou un moindre, l'ordonnée qui précede, & celle qui ſuit immédiatement, doivent être moindres ou plus grandes qu'elle; ces ordonnées étant Y & Z, elles doivent être l'une & l'autre moindres que y, ſi celle-ci eſt un plus grand, & plus grandes ſi elle eſt un moindre. Mais $\frac{dy}{dx}$ étant nul, on a

$$Y = y + \frac{q^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{q^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \&c.,$$

$$Z = y + \frac{q^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{q^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} - \&c.,$$

où nous ſuppoſons q une quantité très petite. Or il eſt clair qu'elles ſeront l'une & l'autre plus grandes ou moindres que y au point où $\frac{dy}{dx}$ eſt nul, ſi à ce même point $\frac{d^2y}{dx^2}$ a une valeur réelle; elles ſeront plus grandes ſi cette valeur eſt poſitive, & moindres ſi elle eſt négative; dans le premier cas y ſera un *minimum*, & un *maximum* dans le ſecond cas. Si au point en queſtion $\frac{d^2y}{dx^2}$ eſt nul ſans que $\frac{d^3y}{dx^3}$ le ſoit; cette derniere quantité n'ayant pas le même ſigne dans les valeurs de Y & Z, l'une de ces deux ordonnées ne pourra être moindre ou plus grande que y, ſans que l'autre ſoit plus grande ou moindre, & dans ce cas y ne ſera ni un *maximum*, ni un *minimum*. Au même point $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ſont nulles & $\frac{d^4y}{dx^4}$ a une valeur réelle; alors Y & Z ſeront l'une & l'autre moindres que y ſi cette valeur eſt négative, & plus grande ſi elle eſt poſitive; dans le premier cas y ſera un *maximum* & un *minimum* dans le ſecond cas. En général pour qu'à un point quelconque l'ordonnée y ſoit un *maximum* ou un *minimum*, il faut que le nombre des différentielles ſucceſſives de cette fonction, qui deviennent nulles à ce point, ſoit impair; elle ſera un *maximum* ſi la différentielle qui ſuit celle qui a diſparu la derniere eſt négative, un *minimum* ſi elle eſt poſitive.

On ne demandera pas, ſans doute, pourquoi l'une des différentielles paires ne diſparoiſſant pas dans les valeurs de Y & Z, ces quantités ſont toujours plus grandes ou moindres que y; pourquoi, par exemple, $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant réel & poſitif, ces quantités ſont plus grandes que y; car ayant ſuppoſé q très petit, on doit voir que les termes qui ſuivent celui où ſe trouve $\frac{d^2y}{dx^2}$ étant multipliés par les puiſſances ſucceſſives de q, leur ſomme, quel que ſoit le ſigne de chacun, doit être moindre que $\frac{q^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$.

EXEMPLE I.

FIG. 35. 48. Suppoſons que $x^3+y^3=axy$ ($AP=x$, $PM=y$, $AB=a$) exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences $3xxdx+3yydy=axdy+aydx$, & $dy=\frac{aydx-3xxdx}{3yy-ax}=o$ lorſque le point P tombe ſur le point cherché E, d'où l'on tire $y=\frac{3xx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3+y^3=axy$, on trouve pour AE une valeur $x=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED ſera plus grande que toutes ſes ſemblables PM.

EXEMPLE II.

FIG. 33. 49. Soit $y-a=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. On aura en prenant les différences, $dy=-\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zéro; mais parceque cette ſuppoſition me donne $-2dx\sqrt[3]{a}=o$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale enſuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x}=o$, d'où l'on tire $x=a$, qui eſt la valeur cherchée de AE.

EXEMPLE III.

FIG. 36. 50. Soit une demi-roulette accourcie AMF, dont la baſe BF eſt moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E ſur le diametre AB, en ſorte que l'appliquée ED ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible.

Ayant mené à diſcrétion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MRm, NSn, & nommant les in-

déterminées AP, x; PN, z; l'arc AN, u; & les données ANB, a; BF, b; CA ou CN, c; l'on aura par la propriété de la roulette $ANB(a) . BF(b) :: AN(u) . NM = \frac{bu}{a}$. Donc $PM = z + \frac{bu}{a}$, & sa différence $Rm = \frac{adz + bdu}{a} = o$ lorsque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles rectangles NSn, NPC sont semblables; car si l'on ôte des angles droits CNn, PNS, l'angle commun CNS, les restes SNn, PNC seront égaux. Et partant $CN(c) . CP (c - x) :: Nn(du) . Sn(dz) = \frac{cdu - xdu}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adz + bdu = o$, on trouvera $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = o$, d'où l'on tirera x (qui est en ce cas AE) $= c + \frac{bc}{a}$.

Il est donc évident que si l'on prend CE du côté de B quatrieme proportionelle à la demi-circonférence ANB, à la base BF, & au rayon CB, le point E sera celui qu'on cherche.

EXEMPLE IV.

51. Couper la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere. FIG. 35.

Ayant nommé l'inconnue AE, x; & la donnée AB, a; on aura $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$, qui doit être un *plus grand*. C'est pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée $MP(y)$ à la coupée $AP(x)$ soit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliquée ED soit la plus grande de toutes ses semblables PM, ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = o$, d'où l'on tire $AE(x) = \frac{2}{3}a$.

Si l'on veut en général que $x^m \times \overline{a-x}^n$ soit un *plus grand* (m & n peuvent marquer tels nombres qu'on voudra) il faudra que la différence de ce produit soit égale à zéro ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1} dx \times \overline{a-x}^n - n.\overline{a-x}^{n-1} dx \times x^m = o$, d'où en divisant par $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1} dx$, l'on tire $am - mx - nx = o$, & $AE(x) = \frac{m}{m+n} a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $AE = 2a$, & il faudra alors énoncer le problême ainsi.

Fig. 37. Prolonger la ligne donnée AB du côté de B en un point E, ensorte que la quantité $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ soit *un moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM sera $\frac{xx}{x-a} = y$, dans laquelle si l'on suppose $x = a$, l'appliquée PM qui devient BC sera $\frac{aa}{o}$, c'est-à-dire infinie; & supposant x infinie, l'on aura $y = x$, c'est-à-dire que l'appliquée sera aussi infinie.

Si $m = 2$ & $n = -1$, l'on aura $y = \frac{x^2}{a-x}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - x^2}{(a-x)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2}{(a-x)^3}$. On tirera de $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = 2a$, qui rend $\frac{d^2y}{dx^2}$ négatif; donc pour $x = 2a$, y seroit un *maximum*. Mais la substitution de $2a$ pour x rend aussi y négatif, ce qui ne doit pas être; on en conclura que le point E ne peut pas être pris entre le point A & le point B, mais sur le prolongement de AB du côté de B. Alors $y = \frac{x^2}{x-a}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^2}{(x-a)^3}$; & comme par la substitution de $2a$ pour x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ devient positif, il est clair qu'en prenant sur AB prolongée, $AE = 2a$, on a $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ qui est un moindre.

Si

Si $m = 1$, & $n = -2$, l'on aura $AE = -a$; d'où il ſuit que l'on doit énoncer le problême alors en cette ſorte.

Prolonger la droite donnée AB du côté de A en un point E, enſorte que la quantité $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ ſoit plus grande que toute autre quantité ſemblable $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$. Fig. 38.

EXEMPLE V.

52. La ligne droite AB étant diviſée en trois parties AC, CF, FB, il faut couper ſa partie du milieu CF au point E, enſorte que le rapport du rectangle $AE \times EB$ au rectangle $CE \times EF$ ſoit moindre que tout autre rapport formé de la même maniere. Fig. 39.

Ayant nommé les données AC, a; CF, b; CB, c; & l'inconnue CE, x; l'on aura $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, & partant le rapport de $AE \times EB$ à $CE \times EF$ ſera $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ qui doit être *un moindre.* C'eſt pourquoi ſi l'on imagine une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée CP (x) ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$, la queſtion ſe réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appliquée ED ſoit la moindre de toutes ſes ſemblables PM. On formera donc (en prenant les différences, & diviſant enſuite par adx) l'égalité $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, dont l'une des racines réſout la queſtion.

Si $c = a + b$, l'on aura $x = \frac{1}{2}b$.

EXEMPLE VI.

53. Entre tous les cones qui peuvent être inſcrits dans une ſphere, déterminer celui qui a la plus grande ſurface convexe.

La queſtion ſe réduit à déterminer ſur le diametre AB Fig. 40.

du demi-cercle AFB le point E, enſorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le rectangle $AF \times FE$ ſoit le plus grand de tous ſes ſemblables $AN \times NP$. Car ſi l'on conçoit que le demi-cercle AFB faſſe une révolution entiere autour du diametre AB, il eſt clair qu'il décrira une ſphere, & que les triangles rectangles AEF, APN décriront des cones inſcrits dans cette ſphere, dont les ſurfaces convexes décrites par les cordes AE, AN, ſeront entre elles comme les rectangles $AF \times FE$, $AN \times NP$.

Soit donc l'inconnue $AE = x$, la donnée $AB = a$, on aura par la propriété du cercle $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; & partant $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, enſorte que l'appliquée ED ſoit plus grande que toutes ſes ſemblables PM. On aura donc en prenant la différence $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, d'où l'on tire AE (x) $= \frac{2}{3}a$.

EXEMPLE VII.

54. On demande entre tous les parallélipipedes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b, celui qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre ſera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélipipede, leur ſomme ſavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ ſera la moitié de ſa ſuperficie qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trou-

vera en prenant la différence $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = o$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^3}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; de ſorte que les trois côtés du parallélipipede qui ſatisfait à la queſtion, ſeront le premier b, le ſecond $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, & le troiſieme $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, ſont égaux entre eux.

EXEMPLE VIII.

55. On demande préſentement entre tous les parallélipipedes qui ſont égaux à un cube donné a^3, celui qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des côtés inconnus, il eſt clair par l'exemple précédent, que les deux autres côtés ſeront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la ſomme des plans alternatifs qui eſt la moitié de la ſuperficie, ſera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3 x}$ qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi ſa différence $-\frac{a^3 dx}{xx} + \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x}} = o$, d'où l'on tire $x = a$; & par conſéquent les deux autres côtés ſeront auſſi chacun $= a$; de ſorte que le cube même donné ſatisfait à la queſtion.

EXEMPLE IX.

56. La ligne AEB étant donnée de poſition ſur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ſes points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); ſoit donnée une quantité compoſée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b, &c. qu'on voudra. On demande quelle doit être la poſition des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en eſt compoſée, ſoit plus grande ou moindre que cette même quantité lorſqu'elle eſt compoſée des droites CP, PF. FIG. 41.

Suppoſons que les lignes CE, EF aient la poſition requiſe; & ayant joint CF, concevons une ligne courbe DM

telle qu'ayant mené à diſcrétion PQM perpendiculaire ſur CF, l'appliquée QM exprime la quantité donnée : il eſt clair que le point P tombant au point E, l'appliquée QM qui devient OD, doit être la moindre ou la plus grande de toutes ſes ſemblables. Il faudra donc que ſa différence ſoit alors égale à zéro ou à l'infini : c'eſt pourquoi ſi la quantité donnée eſt par exemple $au+zz$, l'on aura $adu+2zdz=o$, & par conſéquent $du. -dz :: 2z. a$. D'où l'on voit déja que dz doit être négative par rapport à du ; c'eſt-à-dire que la poſition des droites CE, EF doit être telle que u croiſſant, z diminue.

Maintenant ſi l'on mene EG perpendiculaire à la ligne AEB, & d'un de ſes points quelconques G les perpendiculaires GL, GI ſur CE, EF; & qu'ayant tiré par le point e pris infiniment près de E, les droites CKe, FeH, on décrive des centres C, F les petits arcs de cercle EK, EH: on formera les triangles rectangles ELG & EKe, EIG & EHe, qui ſeront ſemblables entre eux ; car ſi l'on ôte des angles droits GEe, LEK le même angle LEe, les reſtes LEG, KEe ſeront égaux ; on prouvera de même que les angles IEG, HEe ſeront égaux. On aura donc $GL . GI :: Ke$ $(du) . He$ $(-dz) :: 2z . a$. D'où il ſuit que la poſition des droites CE, EF doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire EG ſur la ligne AEB ; le ſinus GL de l'angle GEC ſoit au ſinus GI de l'angle GEF, comme les quantités qui multiplient dz ſont à celles qui multiplient du. Ce qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

57. Si l'on veut à préſent que la droite CE ſoit donnée de poſition & de grandeur, que la droite EF le ſoit de grandeur ſeulement, & qu'il faille trouver ſa poſition ; il eſt clair que l'angle GEC étant donné, ſon ſinus GL le ſera auſſi, & par conſéquent le ſinus GI de l'angle cherché GEF. Donc ſi l'on décrit un cercle du diametre EG, & que l'on porte la valeur de GI ſur ſa circonférence de G en I; la droite EF qui paſſe par le point I aura la poſition requiſe.

Soit $au+bz$ la quantité donnée ; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne à EC & à EF, la poſition de cette derniere ſera toujours la même, puiſqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI, qui par conſéquent ne change point. Si $a=b$, il eſt clair que la poſition de EF doit être ſur CE prolongée du côté de E ; puiſque $GL = GI$, lorſque les points C, F tombent de part & d'autre de la ligne AEB : mais lorſqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG doit être pris égal à l'angle CEG. FIG. 42.

EXEMPLE. X.

58. Le cercle AEB étant donné de poſition avec les points C, F hors de ce cercle ; trouver ſur ſa circonférence le point E tel que la ſomme des droites CE, EF ſoit la moindre qu'il eſt poſſible. FIG. 42.

Suppoſant que le point E ſoit celui que l'on cherche, & menant par le centre O la ligne OEG, il eſt clair qu'elle ſera perpendiculaire ſur la circonférence AEB ; & partant * que les angles FEG, CEG ſeront égaux entre eux. Si donc l'on mene EH enſorte que l'angle EHO ſoit égal à l'angle CEO, & de même EK, enſorte que l'angle EKO ſoit égal à l'angle FEO, & les paralleles ED, EL à OF, OC ; on formera les triangles ſemblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE ; & en nommant les connues OE ou OA ou OB, a ; OC, b ; OF, c ; & les inconnues OD ou LE, x ; DE ou OL, y ; l'on aura $OH = \frac{aa}{b}$, $OK = \frac{aa}{c}$ & $HD\left(x - \frac{aa}{b}\right) . DE(y) :: KL\left(y - \frac{aa}{c}\right) . LE(x)$. Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui eſt une équation à une hyperbole que l'on conſtruira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E.

* *Art.* 57.

EXEMPLE XI.

59. Un voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F, FIG. 43.

doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté de C l'espace a dans le temps c, & dans l'autre du côté de F l'espace b dans le même temps c: on demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin qu'il emploie le moins de temps qu'il est possible pour parvenir de C en F. Si l'on fait $a . CE(u) :: c . \frac{cu}{a}$. Et $b . EF(z) :: c . \frac{cz}{b}$. Il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le temps que le voyageur emploie à parcourir la droite CE, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celui qu'il emploie à parcourir EF; de sorte que $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$ doit être un

* Art. 56. *moindre*. D'où il suit * qu'ayant mené EG perpendiculaire sur la ligne AB; le sinus de l'angle GEC doit être au sinus de l'angle GEF, comme a est à b.

Cela posé, si l'on décrit du point cherché E comme centre de l'intervalle EC le cercle CGH, & qu'on mene sur la droite AEB les perpendiculaires CA, HD, FB, & sur CE, EF les perpendiculaires GL, GI; l'on aura $a . b :: GL . GI$. Or $GL = AE$, & $GI = ED$, parceque les triangles rectangles GEL & ECA, GEI & EHD sont égaux & semblables entre eux, comme il est facile à prouver. C'est pourquoi si l'on nomme l'inconnue AE, x; on trouvera $ED = \frac{bx}{a}$: & nommant les connues AB, f; AC, g; BF, h; les triangles semblables EBF, EDH donneront $EB (f - x) . BF(h) :: ED \left(\frac{bx}{a}\right) . DH = \frac{bhx}{af - ax}$. Mais à cause des triangles rectangles EDH, EAC, qui ont leurs hypothénuses EH, EC égales, l'on aura $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, c'est-à-dire, en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg$. De sorte que ôtant les fractions, & ordonnant ensuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{llll} aax^4 - 2aafx^3 & + aaffxx & - 2aafggx + aaffgg = o. \\ - bb \quad + 2bbf & + aagg & \\ & - bbff & \\ & - bbhh & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniere qui ſuit, ſans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues AB, f; AC, g; Bf, h; & l'inconnue AE, x; on fera $a . CE$ $(\sqrt{gg + xx}) :: c . \frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au temps que le voyageur emploie à parcourir la droite CE. Et de même $b . EF$ $(\sqrt{ff - 2fx + xx + hh}) :: c . \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = au temps que le voyageur emploie à parcourir la droite EF. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = à un *moindre*; & partant ſa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cxdx - cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}$ $= o$; d'où l'on tire, en diviſant par cdx & en ôtant les incommenſurables, la même égalité que ci-devant, dont l'une des racines fournira pour AE la valeur qu'on cherche.

EXEMPLE XII.

60. Soit une poulie F qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D ſuſpendu par la corde DFB qui paſſe au-deſſus de la poulie F, & qui eſt attachée en B, enſorte que les points C, B ſont ſitués dans la même ligne horizontale CB. On ſuppoſe que la poulie & les cordes n'aient aucune peſanteur; & l'on demande en quel endroit le plomb D ou la poulie F doit s'arrêter. FIG. 44.

Il eſt clair par les principes de la Mécanique que le plomb D deſcendra le plus bas qu'il lui ſera poſſible, au-deſſous de l'horizontale CB; d'où il ſuit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi nommant les données CF, a; DFB, b; CB, c; & l'inconnue CE, x; l'on aura

$EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$, & $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$ qui doit être un *plus grand* ; & partant sa différence $\frac{cdx}{\sqrt{aa + cc - 2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}} = o$, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = o$, & divisant par $x - c$, il vient $2cxx - aax - aac = o$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le plomb D lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniere que voici.

Nommant EF, y ; BF, z ; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand* ; & partant $dy = dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre ; & partant si du point f pris infiniment près de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire sur BF, l'on aura $FR = dy$, & $FS = dz$. Elles seront donc égales entre elles ; & par conséquent les petits triangles rectangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypothénuse Ff commune, seront égaux & semblables ; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf, c'est-à-dire que le point F doit être tellement situé dans la circonférence FA, que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F soient égaux entre eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux.

Cela posé, si l'on mene FH, ensorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD ; les triangles CBF, CFH seront semblables ; comme aussi les triangles rectangles ECF, EFH, puisque l'angle CFE est égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD ; & par conséquent on aura

$$CH = \frac{aa}{c}, \text{ \& } HE \left(x - \frac{aa}{c}\right) . EF(y) :: EF(y) . EC(x).$$

Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la propriété du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE

EXEMPLE XIII.

61. L'élévation du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuscule. Fig. 45.

Soit C le centre de la sphere, $APTOBHQ$ le méridien; $HDdO$ l'horison; $QEeT$ le cercle crépusculaire parallele à l'horison; $AMNB$ l'équateur; $FEDG$ la portion du parallele à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuscule, renfermée entre les plans de l'horison & du cercle crépusculaire; P le pole austral; PEM, PDN des quarts de cercle de déclinaison. L'arc HQ ou OT du méridien compris entre l'horison & le cercle crépusculaire, & l'arc OP de l'élévation du pole sont donnés, & par conséquent leurs sinus droits CI ou FL ou QX, & OV. L'on cherche le sinus CK de l'arc EM ou DN de la déclinaison du Soleil lorsqu'il décrit le parallele ED.

S'imaginant une autre portion $fedg$ d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de $FEDG$, avec les quarts de cercles Pem, Pdn; il est clair que le temps que le Soleil emploie à parcourir l'arc ED, devant être un *moindre*, la différence de l'arc MN qui en est la mesure, & qui devient mn lorsque ED devient ed, doit être nulle; d'où il suit que les petits arcs Mm, Nn, & par conséquent les petits arcs Re, Sd seront égaux entre eux. Or les arcs RE, SD étant renfermés entre les mêmes paralleles ED, ed, sont aussi égaux, & les angles en S & en R sont droits. Donc les petits triangles rectangles ERe, DSd, que l'on considere comme rectilignes * à cause de l'infinie petitesse de leurs côtés, seront égaux & semblables; & par conséquent les hypothénuses Ee, Dd seront aussi égales entre elles. * Art. 3.

Cela posé, les droites DG, EF, dg, ef communes sections des plans $FEDG$, $fedg$ paralleles à l'équateur, avec l'horison & le cercle crépusculaire, seront perpendiculaires sur les diametres HO, QT, puisque les plans de tous ces cercles sont perpendiculaires chacun sur le plan du méridien; & les petites droites Gg, Ff seront égales entre elles, puis-

que les droites FG, fg sont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il est clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50 que si l'on mene à discrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, sera à leur différence, comme le rayon est à la coupée depuis le centre ; ce qui donne ici (à cause des cercles HDO, QET) $CO . CG :: Dd$ ou $Ee . DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ . IF :: CO + IQ$ ou $OX . CG + IF$ ou GL. Mais à cause des triangles rectangles semblables CVO, CKG, FLG, l'on aura $CO . CG :: OV . GK$. Et $GK . GL :: CK . FL$ ou QX. Donc $OV . CK :: OX . XQ :: XQ . XH$ par la propriété du cercle : c'est-à dire que si l'on prend QX pour le rayon ou sinus total dans le triangle rectangle QXH, dont l'angle HQX est de 9 degrés, parceque les Astronomes font l'arc HQ de 18 degrés, l'on aura comme le sinus total est à la tangente de 9 degrés, de même le sinus de l'élévation du pole est au sinus de la déclinaison australe du Soleil dans le temps du plus petit crépuscule. D'où il suit que si l'on ôte 0.8002875 du logarithme du sinus de l'élévation du pole ; le reste sera le logarithme du sinus cherché. Ce qu'il falloit trouver.

On pourra consulter sur ce problême l'Astronomie sphérique de M. Mauduit, page 62 & suivantes.



SECTION IV.

Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement.

COMME l'on se servira dans la suite des différences secondes, troisiemes, &c. il est nécessaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

DÉFINITION. I.

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est appellée la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien sa *différence seconde*. Ainsi si l'on imagine une troisieme appliquée nq infiniment proche de la seconde mp, & qu'on mene mS parallele à AB, & mH parallele à RS; on appellera Hn la *différence de la différence* Rm, ou bien la *différence seconde* de PM. Fig. 46.

De même si l'on imagine une quatrieme appliquée of infiniment proche de la troisieme nq, & qu'on mene nT parallele à AB, & nL parallele à ST; on appellera la différence des petites droites Hn, Lo, la *différence de la différence seconde*, ou bien la *différence troisieme* de PM. Et ainsi des autres.

AVERTISSEMENT.

On marquera dans la suite chaque différence par un nombre de d *qui en exprime l'ordre ou le genre. Par exemple, on marquera par* dd *la différence seconde ou du second genre; par* ddd, *la différence troisieme ou du troisieme genre; par* dddd, *la différence quatrieme ou du quatrieme genre, & de même des autres. Ainsi* ddy *exprimera* HN; dddy, Lo — Hn, *ou* Hn — LO; *&c.*

Quant aux puissances de ces différences, on les marquera

par des chiffres postérieurs mis au-dessus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entieres. Par exemple, le quarré, ou le cube de dy *sera* dy^2, *ou* dy^3; *le quarré, ou le cube de* ddy *sera* ddy^2, *ou* ddy^3; *celui de* $dddy$ *sera* $dddy^2$, *ou* $dddy^3$; *celui de* $ddddy$ *sera* $ddddy^2$, *ou* $ddddy^3$, *&c.*

COROLLAIRE. I.

62. Si l'on nomme chacune des coupées AP, Ap, Aq, Af, x; chacune des appliquées PM, pm, qn, fo, y; & chacune des portions courbes AM, Am, An, Ao, u; il est clair que dx exprimera les différences Pp, pq, qf des coupées; dy les différences Rm, Sn, To des appliquées; & du les différences Mm, mn, no des portions de la courbe AMD. Or afin de prendre, par exemple, la différence seconde Hn de la variable PM, il faut imaginer sur l'axe deux petites parties Pp, pq, & sur la courbe deux autres Mm, mn pour avoir les deux différences Rm, Sn; & partant si l'on suppose que les petites parties Pp, pq soient égales entre elles, il est clair que dx sera constante par rapport à dy & à du, puisque Pp qui devient pq demeure la même pendant que Rm qui devient Sn, & Mm qui devient mn, varient. On pourroit supposer que les petites parties de la courbe Mm, mn seroient égales entre elles, & alors dx seroit constante par rapport à dx & à dy; & enfin si l'on supposoit que Rm & Sn fussent égales, dy seroit constante par rapport à dx & à du, & sa différence Hn (ddy) seroit nulle.

De même pour prendre la différence troisieme de PM, ou la différence de la différence seconde Hn, il faut imaginer sur l'axe trois petites parties Pp, pq, qf; sur la courbe trois autres Mm, mn, no; & sur les appliquées aussi trois autres Rm, Sn, To; & alors on aura dx ou du ou dy pour constante, selon qu'on supposera que les petites parties Pp, pq, qf, ou Mm, mn, no, ou Rm, Sn, To sont égales entre elles. Il en est de même des différences quatriemes, cinquiemes, &c.

FIG. 47. Tout ceci se doit aussi entendre des courbes AMD, dont les appliquées BM, Bm, Bn partent toutes d'un point fixe B;

car pour avoir, par exemple, la différence ſeconde de BM, il faut imaginer deux autres appliquées Bm, Bn qui faſſent des angles MBm, mBn infiniment petits, & ayant décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, mS; la différence des petites droites Rm, Sn, ſera la différence ſeconde de BM; & l'on pourra prendre pour conſtants les petits arcs MR, mS, ou les petites portions de la courbe Mm, mn, ou enfin les petites droites Rm, Sn. Il en va de même pour les différences troiſiemes, quatriemes, &c. de l'appliquée BM.

REMARQUE.

63. On doit bien remarquer, 1°. Qu'il y a différens ordres d'infiniment petits : que Rm, par exemple, eſt infiniment petite par rapport à PM, & infiniment grande par rapport à Hn; de même que l'eſpace $MPpm$ eſt infiniment petit par rapport à l'eſpace APM, & infiniment grand par rapport au triangle MRm. FIG. 46.

2°. Que la différence entiere Pf eſt encore infiniment petite par rapport à AP; parceque toute quantité qui eſt la ſomme d'un nombre fini de quantités infiniment petites telles que Pp, pq, qf par rapport à une autre AP, demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité : & qu'afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inférieur qui la compoſe, ſoit infini.

COROLLAIRE II.

64. On peut marquer en cette ſorte les différences ſecondes dans toutes les ſuppoſitions poſſibles.

1°. Dans les courbes où les appliquées mR, nS ſont paralleles entre elles, on prolongera la petite droite Mm en H où elle rencontre l'appliquée Sn; & ayant décrit du centre m, de l'intervalle mn, l'arc nk, on tirera les petites droites nl, li, kcg paralleles à mS & à Sn. Cela poſé, ſi l'on veut que dx ſoit conſtante, c'eſt-à-dire que MR ſoit égale à mS; il eſt clair que le triangle mSH eſt ſemblable & égal au triangle MRm, & qu'ainſi Hn eſt ddy, c'eſt-à-dire la dif- FIG. 48. 49.

férence de Rm & Sn, & $Hk = ddu$. Mais si l'on suppose que du soit constante, c'est-à-dire que $Mm = mn$ ou à mk; il est évident alors que le triangle mgk est semblable & égal au triangle MRm, & qu'ainsi $kc = ddy$, & Sg ou $cn = ddx$. Enfin si l'on prend dy pour constante, c'est-à-dire $mR = nS$, il s'ensuit que le triangle mil est egal & semblable au triangle MRm, & qu'ainsi iS ou $nl = ddx$, & $lk = ddu$.

FIG. 50. 51. 2°. Dans les courbes dont les appliquées BM, Bm, Bn, partent d'un même point B, l'on décrira du centre B les arcs MR, mS, que l'on regardera * comme de petites droites perpendiculaires sur Bm, Bn; & ayant prolongé Mm en E, & décrit du centre m, de l'intervalle mn, le petit arc nkE, on fera l'angle $EmH = mBn$, & l'on tirera les petites droites nl, li, kcg paralleles à mS & à Sn. Cela posé, à cause du triangle BSm rectangle en S, l'angle $BmS + mBn$, ou $+ EmH$ vaut un droit; & partant l'angle BmE vaut un droit $+ SmH$; il vaut aussi le droit $MRm + RMm$, puisqu'il est externe au triangle EMm. Donc l'angle $SmH = RMm$.

* *Art.* 3.

Il suit de ceci, 1°. Que si l'on veut que dx soit constante, c'est-à-dire que les petits arcs MR, mS soient égaux entre eux, le triangle SmH sera semblable & égal au triangle RMm; & qu'ainsi $Hn = ddy$, & $Hk = ddu$. 2°. Que si l'on prend du pour constante, le triangle gmk sera semblable & égal au triangle RMm; & qu'ainsi kc exprimera ddy, & Sg ou cn, ddx. Enfin, 3°. Que si l'on prend dy pour constante, les triangles iml, RMm seront égaux & semblables; & qu'ainsi iS ou $ln = ddx$, & $lk = ddu$.

PROPOSITION I.

Problême.

65. *Prendre la différence d'une quantité composée de différences quelconques.*

On prendra pour constante la différence que l'on voudra, & traitant les autres comme des quantités variables, on se servira des regles prescrites dans la Section premiere.

La différence de $\frac{ydy}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, & $\frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$ en prenant dy pour constante.

Celle de $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le tout divisé par dx, c'est-à-dire $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $dzdx\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - zddx\sqrt{dx^2 + dy^2}$, le tout divisé par dx^2, c'est à dire $\frac{dzdx^3 + dzdxdy^2 - zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

La différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, en prenant dx pour constante, sera $\overline{dy^2 + yddy}\sqrt{dx^2 + dy^2} - \frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le tout divisé par $dx^2 + dy^2$, c'est-à-dire $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 - ydydxddx}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

La différence de $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, en prenant dx pour constante, sera $\frac{-3dxdyddy^2.\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy.\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Mais il faut observer que dans ce dernier cas il n'est pas libre de prendre dy pour constante; car dans cette supposition sa différence ddy seroit nulle, & par conséquent elle ne devroit pas se rencontrer dans la quantité proposée.

NOTE IV.

1. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les propriétés des lignes courbes se réduisent à trouver de certaines expressions où entrent des co-

ordonnées de ces courbes, & les rapports entre les différentielles de ces co-ordonnées. Supposons qu'une de ces expressions renferme x, y, $\frac{dy}{dx}$; & qu'on propose de la différentier. En faisant $\frac{dy}{dx} = p$, on aura (N. 1, n°. 19.) pour la différentielle demandée une quantité de cette forme $Mdx + Ndy + Pdp$; & il ne sera plus question que de trouver la valeur de dp. En différentiant l'équation $dy = p\,dx$ en faisant tout varier, on a $d^2y = p\,d^2x + dp\,dx$, & par conséquent $dp = \frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dx}$. Nous avons trouvé dp égal à $\frac{d^2y}{dx}$, lorsque nous supposions dx constant; nous l'aurions trouvé égal à $-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dx}$, si nous avions supposé dy constant. Mais la courbe étant déterminée, quelle qu'elle soit, on doit trouver la même chose dans toutes les hypotheses.

Si, par exemple, $y = x^m$, d'où l'on tire $dy = m\,x^{m-1}\,dx$, &, faisant tout varier, $d^2y = \overline{m-1}.x^{m-2}\,dx^2 + m\,x^{m-1}\,d^2x$; on aura $\frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dx} = m.\overline{m-1}.x^{m-2}\,dx$. On trouvera le même résultat, en substituant dans $\frac{d^2y}{dx}$ pour d^2y ceci $m.\overline{m-1}.x^{m-2}\,dx^2$, qui est sa valeur lorsque dx est supposé constant. Mais lorsque c'est dy qui est supposé constant, $m.\overline{m-1}.x^{m-2}\,dx^2 + m\,x^{m-1}\,d^2x = 0$; en substituant dans $-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dx}$ pour d^2x, sa valeur tirée de l'équation précédente, on a $m.\overline{m-1}\,x^{m-2}\,dx$, qui est toujours le même résultat.

2. On pourroit demander la valeur de dp dans toute autre hypothese, en prenant, par exemple, pour constante la différentielle $y\,dx$. On fera $y\,dx = dz$, d'où l'on tirera $y = \frac{dz}{dx}$ & $dy = -\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2x}{dx}$, car dz est constant. On mettra dans $dp = \frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2x}{dx}$ pour $\frac{d^2x}{dx}$ sa valeur $-\frac{dy}{y}$ tirée de l'équation précédente, & on aura $\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx}\,\frac{dy}{y}$ qui

est

eſt la différentielle de p lorſque $y\,dx$ eſt conſtant. Mais quelle eſt cette même différentielle lorſque c'eſt $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ qui eſt pris pour conſtante? En ſuppoſant $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dz$, ou $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dz}{dx}$; & différentiant, en regardant dz comme conſtant, il vient $\frac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{dx}$. Or comme avec cette équation, qui devient $\frac{d^2x}{dx} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx}$, on peut éliminer $\frac{d^2y}{dx}$ ou $\frac{d^2x}{dx}$ de $dp = \frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx}$; on aura dans l'hypotheſe actuelle deux valeurs de dp : $dp = -\frac{dx^2 + dy^2}{dx\,dy}\frac{d^2x}{dx}$ ou $dp = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\frac{d^2y}{dx}$.

3. Soit $\frac{dp}{dx} = q$; à cauſe de $d^2y - p\,d^2x = q\,dx^2$, on aura, en faiſant tout varier, $d^3y - p\,d^3x - dp\,d^2x = dq\,dx^2 + 2q\,dx\,d^2x$, d'où il ſera facile de tirer $dq = \frac{d^3y}{dx^2} - p\frac{d^3x}{dx^2} - 3q\frac{d^2x}{dx}$. On mettra pour p & q leurs valeurs $\frac{dy}{dx}$ & $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, & il viendra $dq = \frac{d^3y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^2} - 3\frac{d^2x}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)$. Dans l'expreſſion précédente tout eſt variable; mais ſi on vouloit que dx fût conſtant, cette différentielle ſeroit $\frac{d^3y}{dx^2}$; elle ſeroit $-\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^2} + 3\,dy\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$, ſi c'étoit dy qu'on voulût faire conſtant. Il ne ſera pas auſſi facile de trouver ce que deviendra la même expreſſion lorſqu'on fera $y\,dx$ conſtant. Cependant de l'équation $y = \frac{dz}{dx}$, on tire $\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ & $\frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx} = -\frac{dz}{dx}\frac{d^3x}{dx^2} + 3\,dz\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$. Donc $\frac{d^2x}{dx} = -\frac{dy}{y}$, $\frac{d^3x}{dx^2} = -\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx} + \frac{2\,dx}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; en ſubſtituant ces valeurs dans

$dq = \frac{d^3 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3 x}{dx^2} - 3\frac{d^2 x}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2 x}{dx^2}\right)$, on aura, lorsque $y\,dx$ est constant, $dq = \frac{d^3 y}{dx^2} + \frac{4}{y}\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx} + \frac{dx}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

Pour trouver la valeur de dq lorsque c'est $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ qu'on a pris pour constante, on reprendra l'équation $\frac{d^2 x}{dx^2} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2}$, de laquelle on tirera $\frac{d^3 x}{dx^2} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^3 y}{d^2 x^2} - \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx$.

Or comme avec ces deux équations on peut éliminer $\frac{d^2 x}{dx^2}$ & $\frac{d^3 x}{dx^2}$, ou $\frac{d^2 y}{dx^2}$ & $\frac{d^3 y}{dx}$, de la valeur de dq où rien n'est supposé constant; on aura dans l'hypothese actuelle,

$$dq = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d^3 y}{dx^2} + 4\,dx\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2\right), \text{ ou}$$

$$dq = -\frac{dx^2 + dy^2}{dx\,dy}\left(\frac{d^3 x}{dx^2} - 3\,dx\left(\frac{d^2 x}{dx^2}\right)^2 + dx\left(\frac{dx}{dy}\frac{d^2 x}{dx^2}\right)^2\right).$$

Nous ne croyons pas nécessaire de pousser plus loin ces calculs.

4. Etant proposée une fonction d'un ordre quelconque, dans laquelle une certaine différentielle est regardée comme constante, on demande de la transformer en une autre dans laquelle on prendra pour constante toute autre différentielle, ou dans laquelle aucune différentielle ne sera regardée comme constante. Pour résoudre ce problême, on changera, par des substitutions convenables, la proposée en une fonction de y, x, p, q, &c, & on mettra pour p, q, &c, les valeurs qui conviendront à la transformation qu'on s'est proposé de faire.

Notre Auteur a différentié $\frac{dx^2 + dy^2 . \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,d^2 y}$, où dx est constante, & a trouvé

$\frac{-3\,dx\,dy\,d^2y^2\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} + dx\,d^3 y\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,d^2 y^2}$; je demande de transformer cette expression en une autre dans laquelle aucune différentielle ne soit prise pour constante. En faisant $\frac{dy}{dx} = p$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = q$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = r$, on la changera en celle-ci,

$\frac{-3pq^2(1+p^2)^{\frac{1}{2}}+r(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q^2}dx$, dans laquelle si l'on met pour $q=\frac{dp}{dx}$ & $r=\frac{dq}{dx}$ les valeurs qu'ont ces quantités lorsqu'aucune différentielle n'est constante, on aura

$$\frac{-3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3}-3\frac{d^2x}{dx^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2}dx,$$

qui devient, lorsque c'est dy qu'on prend pour constante,

$$\frac{-3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2}dx.$$

DÉFINITION II.

Lorsqu'une ligne courbe *AFK* est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite *AB* ou vers un point fixe *B*; le point *F* qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appellé point d'*inflexion*, lorsque la courbe étant parvenue en *F* continue son chemin vers le même côté : & point de *rebroussement* lorsqu'elle rebrousse chemin du côté de son origine. FIG. 52, 53, 54, 55.

PROPOSITION II.

Problême général.

66. *La nature de la ligne courbe* AFK *étant donnée, déterminer le point d'inflexion ou de rebroussement* F.

Supposons en premier lieu que la ligne courbe *AFK* ait pour diametre une ligne droite *AB*, & que ses appliquées FIG. 52, 53.

M ij

PM, EF, &c. ſoient toutes paralleles entre elles. Si l'on mene par le point F, l'appliquée FE avec la tangente FL; & par un point quelconque M de la partie AF, une appliquée MP avec une tangente MT : il eſt clair,

1°. Dans les courbes qui ont un point d'inflexion, que la coupée AP croiſſant continuellement, la partie AT du diametre, interceptée entre l'origine des x & la rencontre de la tangente, croît auſſi juſqu'à ce que le point P tombe en E, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AT étant appliquée en P, doit devenir un *plus grand* AL lorſque le point P tombe ſur le point cherché E.

2°. Dans celles qui ont un point de rebrouſſement, que la partie AT croiſſant continuellement, la coupée AP croît auſſi juſqu'à ce que le point T tombe en L, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AP étant appliquée en T doit devenir un *plus grand* AE lorſque le point T tombe en L.

Or ſi l'on nomme AE, x; EF, y; l'on aura $AL = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la difference, qui eſt $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2} - dx$ (en ſuppoſant dx conſtante), étant diviſée par dx difference de

* *Art.* 47. AE, doit être * nulle ou infinie; ce qui donne $-\frac{yddy}{dy^2} = o$ ou à l'infini : de ſorte que multipliant par dy^2, & diviſant par $-y$, il vient $ddy = o$ ou à l'infini; ce qui ſervira dans la ſuite de formule générale pour trouver le point d'inflexion ou de rebrouſſement F. Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx; & prenant la différence de cette valeur, en ſuppoſant dx conſtante, on trouvera une valeur de ddy en dx^2, laquelle étant égalée d'abord à zéro, & enſuite à l'infini, ſervira dans l'une ou l'autre de ſes ſuppoſitions à trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF aille couper la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebrouſſement F.

L'origine A des x peut être tellement ſituée que $AL = x - \frac{ydx}{dy}$, au lieu de $\frac{ydx}{dy} - x$, & que AL ou AE ſoit *un*

moindre au lieu d'être un *plus grand* : mais comme la conséquence eſt toujours la même, & que cela ne peut faire aucune difficulté ; je ne m'y arrêterai pas.

Il eſt à remarquer que AL ne peut jamais être $= x + \frac{ydx}{dy}$; car lorſque le point T tombe de l'autre côté du point P par rapport à l'origine A des x, la valeur de $\frac{ydx}{dy}$ ſera négative, ſuivant l'article 10, & par conſéquent celle de $-\frac{ydx}{dy}$ ſera poſitive : de ſorte qu'on aura encore en ce cas $AE + EL$ ou $AL = x - \frac{ydx}{dy}$.

La même choſe ſe peut encore trouver de cette autre maniere. Il eſt clair qu'en prenant dx pour conſtante, & ſuppoſant que l'appliquée y augmente, Sn eſt moindre que SH ou que Rm dans la partie concave, & plus grande dans la convexe. D'où l'on voit que la valeur de Hn (ddy) doit devenir de poſitive négative ſous le point d'inflexion ou de rebrouſſement F ; & partant * qu'elle y doit être nulle ou infinie. FIG. 48, 49. * *Art.* 47.

Suppoſons en ſecond lieu que la courbe AFK ait pour appliquées les droites BM, BF, BM, qui partent toutes d'un même point B. Si l'on mene telle appliquée BM qu'on voudra, avec une tangente MT qui rencontre BT perpendiculaire à BM au point T ; & qu'ayant pris le point m infiniment près de M, l'on tire l'appliquée Bm, la tangente mt, & la perpendiculaire Bt ſur Bm, qui rencontre MT en O ; il eſt viſible (en ſuppoſant que l'appliquée BM, qui devient Bm, augmente) que dans la partie concave, Bt ſurpaſſe BO, & qu'au contraire elle eſt moindre dans la partie convexe ; de ſorte que ſous le point d'inflexion ou de rebrouſſement F, la valeur de Ot doit devenir de poſitive négative. FIG. 54, 55. FIG. 56, 57.

Cela poſé, ſi l'on décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, TH, on formera les triangles ſemblables mRM, MBT, THO, & les petits ſecteurs ſemblables BMR, BTH. Nommant donc BM, y ; MR, dx ; l'on aura mR (dy), FIG. 56.

$RM(dx) :: BM(y) . BT = \frac{ydx}{dy} :: MR(dx) . TH = \frac{dx^2}{dy} :: TH \left(\frac{dx^2}{dy}\right) . HO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or si l'on prend la différence de $BT \left(\frac{ydx}{dy}\right)$ en ſuppoſant dx conſtante, il vient $Bt - BT$ ou $Ht = \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$; & partant $OH + Ht$ ou $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$. D'où il ſuit en multipliant par dy^2, & diviſant par dx, que la valeur de $dx^2 + dy^2 - yddy$ ſera nulle ou infinie ſous le point d'inflexion ou de
Fig. 54, 55. rebrouſſement F. Or la nature de la ligne AFK étant donnée, l'on aura des valeurs de dy en dx, & de ddy en dx^2, leſquelles étant ſubſtituées dans $dx^2 + dy^2 - yddy$, formeront une quantité, qui étant égalée d'abord à zéro, & enſuite à l'infini, ſervira à trouver pour BF une valeur telle que décrivant du centre B, & de ce rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'inflexion ou de rebrouſſement F. Ce qui étoit propoſé.

Fig. 50, 51. Pour trouver encore la même choſe d'une autre maniere, il faut conſidérer que dans la partie concave l'angle BmE ſurpaſſe l'angle Bmn, & qu'au contraire dans la convexe il
Fig. 50. eſt moindre; & partant que l'angle $BmE - Bmn$ ou Emn, c'eſt-à-dire l'arc En qui en eſt la meſure, devient de poſitif négatif ſous le point cherché F. Or prenant dx pour conſtante, les triangles rectangles ſemblables HmS, Hnk, donneront $Hm\ (du) . mS\ (dx) :: Hn\ (-ddy) . nk = -\frac{dxddy}{du}$, où l'on doit obſerver que la valeur de Hn eſt négative, parceque $Bm\ (y)$ croiſſant, $Rm\ (dy)$ diminue. Mais à cauſe des ſecteurs ſemblables BmS, mEk, l'on aura $Bm(y) . mS\ (dx) :: mE\ (du) . Ek = \frac{dxdu}{y}$, & partant
Fig. 54, 55. $Ek + kn$ ou $En = \frac{dxdu^2 - ydxddy}{ydu}$. D'où il ſuit, en multipliant par ydu, & diviſant par dx, que $du^2 - yddy$ ou $dx^2 + dy^2 - yddy$ doit devenir de poſitive, négative ſous le point cherché F.

Si l'on ſuppoſe que y devienne infinie, les termes dx^2 &

dy^2 seront nuls par rapport au terme $yddy$; & par conséquent la formule $dx^2 + dy^2 - yddy = o$ ou à l'infini, se changera en cette autre $-yddy = o$ ou à l'infini, c'est-à-dire en divisant par $-y$, $ddy = o$ ou à l'infini, qui est la formule du premier cas. Ce qui doit aussi arriver, puisque les appliquées BM, BF, BM deviennent alors paralleles.

COROLLAIRE.

67. Lorsque $ddy = o$ il est clair que la différence de AL doit être nulle par rapport à celle de AE; & partant que les deux tangentes infiniment proches FL, fL doivent tomber l'une sur l'autre en ne faisant qu'une seule ligne droite fFL. Mais lorsque $ddy =$ à l'infini, la différence de AL doit être infiniment grande par rapport à celle de AE, ou (ce qui est la même chose) la différence de AE est infiniment petite par rapport à celle AL; & par conséquent l'on peut mener par le même point F deux tangentes FL, Fl qui fassent entre elles un angle infiniment petit LFl.

FIG. 52.

FIG. 53.

De même lorsque $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, il est visible que Ot doit devenir nulle par rapport à MR; & qu'ainsi les deux tangentes infiniment proches MT, mt doivent tomber l'une sur l'autre, lorsque le point M devient un point d'inflexion ou de rebroussement : mais au contraire lorsque $dx^2 + dy^2 - yddy =$ à l'infini, Ot doit être infinie par rapport à MR, ou (ce qui est la même chose) MR infiniment petite par rapport à Ot; & par conséquent le point m doit tomber sur le point M, c'est-à-dire qu'on peut mener par le même point M deux tangentes qui fassent entre elles un angle infiniment petit, lorsque ce point devient un point d'inflexion ou de rebroussement.

FIG. 56, 57

Il est évident que la tangente au point d'inflexion ou de rebroussement F, étant prolongée, touche & coupe la courbe AFK dans ce même point.

La remarque que nous avons faite plus haut (Note 3, n°. 3) doit avoir lieu ici dans toute son étendue. Par exemple, de ce que pour une certaine valeur de x, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, il ne s'ensuit pas qu'à ce point il y ait

inflexion ou rebrouſſement ; il faut encore que cette valeur de x ne faſſe pas diſparoître $\frac{d^3y}{dx^3}$, ou que ſi $\frac{d^3y}{dx^3}$ diſparoît, il faut que cette valeur rende nulle $\frac{d^4y}{dx^4}$ ſans que $\frac{d^5y}{dx^5}$ le devienne : il faut, en un mot, que le nombre des différentielles qui diſparoiſſent par la ſubſtitution ſoit impair, en comptant de la premiere excluſivement, celle qui ſuit immédiatement ayant une valeur réelle.

EXEMPLE I.

FIG. 58. 68. Soit une ligne courbe AFK qui ait pour diametre la ligne droite AB, & qui ſoit telle que la relation de la coupée AE (x) à l'appliquée EF (y), ſoit exprimée par l'équation $axx = xxy + aay$. Il s'agit de trouver pour AE une valeur telle que l'appliquée EF rencontre la courbe AFK au point d'inflexion F.

L'équation à la courbe eſt $y = \frac{axx}{xx+aa}$; & partant $dy = \frac{2a^3xdx}{\overline{xx+aa}^2}$, & prenant la différence de cette quantité en ſuppoſant dx conſtante, & l'égalant enſuite à zéro, on trouve $\frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}}{\overline{xx+aa}^4} = 0$; ce qui, multiplié par $\overline{xx+aa}^4$, & diviſé par $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}$, donne $xx + aa - 4xx = 0$. d'où l'on tire AE (x) $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on met à la place de xx ſa valeur $\frac{1}{3}aa$ dans l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$, on trouve EF (y) $= \frac{1}{4}a$; de ſorte qu'on peut déterminer le point d'inflexion F ſans ſuppoſer que la courbe AFK ſoit décrite.

Si l'on mene AC parallele aux appliquées EF, & égale à la droite donnée a, & qu'on tire CG parallele à AB, elle ſera aſymptote de la courbe AFK. Car ſi l'on ſuppoſe x infinie, on pourra prendre xx pour $xx + aa$; & partant l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx+aa}$ ſe changera en celle-ci $y = a$.

EXEMPLE

EXEMPLE II.

69. Soit $y - a = \overline{x - a}^{\frac{3}{5}}$. Donc $dy = \frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}} dx$, & $ddy = -\frac{6}{25}\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}} dx^2 = \frac{-6\,dx^2}{25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}}$, en prenant dx pour constante. Or si l'on suppose cette fraction égale à zéro, on trouve $-6\,dx^2 = o$; ce qui ne faisant rien connoître, il la faut supposer infiniment grande; & par conséquent son dénominateur $25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}$ infiniment petit ou zéro. D'où l'inconnue $AE\ (x) = a$.

EXEMPLE III.

70. Soit une demi-roulette allongée AFK dont la base BK surpasse la demi-circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il s'agit de déterminer sur le diametre AB le point E, ensorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'inflexion F. Fig. 59.

Ayant nommé les connues ADB, a; BK, b; AB, $2c$; & les inconnues AE, x; ED, z; l'arc AD, u; EF, y; l'on aura par la propriété de la roulette $y = z + \frac{bu}{a}$; & partant $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Or par la propriété du cercle l'on aura $z = \sqrt{2cx - xx}$, $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}$, & $du\ (\sqrt{dx^2 + dz^2}) = \frac{c\,dx}{\sqrt{2cx - xx}}$. Donc mettant pour dz & du leurs valeurs, on trouve $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$, dont la différence (en prenant dx pour constante) donne $\frac{\overline{bcx - acc - bcc} \times dx^2}{\overline{2cx - xx} \times \sqrt{2cx - xx}} = o$; d'où l'on tire $AE\ (x) = c + \frac{ac}{b}$, & $CE = \frac{ac}{b}$.

Il est clair qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion F, il faut que b surpasse a; car s'il étoit moindre, CE surpasseroit CB.

EXEMPLE IV.

FIG. 60. 71. On demande le point d'inflexion F de la Conchoïde AFK de *Nicomede*, laquelle a pour pole le point P, & pour aſymptote la droite BC. Sa propriété eſt telle, qu'ayant mené du pole P à un de ſes points quelconques F la droite PF, qui rencontre l'aſymptote BC en D; la partie DF eſt toujours égale à une même droite donnée a.

Ayant mené PA perpendiculaire, & FE parallele à BC, on nommera les connues AB ou FD, a; BP, b; & les inconnues BE, x; EF, y; & tirant DL parallele à BA, les triangles ſemblables DLF, PEF donneront $DL\,(x)$. $LF\,(\sqrt{aa-xx}) :: PE\,(b+x)$. $EF\,(y) = \frac{\overline{b+x}\sqrt{aa-xx}}{x}$, dont la différence eſt $dy = \frac{x^3dx + aabdx}{xx\sqrt{aa-xx}}$ Si donc on prend la différence de cette quantité, & qu'on l'égale à zéro, on formera l'égalité $\frac{\overline{2a^4b - aax^3 - 3aabxx} \times dx^2}{\overline{aax^3 - x^5} \times \sqrt{aa-xx}} = o$, qui ſe réduit à $x^3 + 3bxx - 2aab = o$, dont l'une des racines fournit pour BE la valeur cherchée.

Si $a = b$, l'équation précédente ſe changera en cette autre $x^3 + 3axx - 2a^3 = o$, laquelle étant diviſée par $x + a$, donne $xx + 2ax - 2aa = o$; & partant $BE\,(x) = -a + \sqrt{3aa}$.

Autrement.

* *Art.* 66. En prenant pour appliquées les lignes PF qui partent du pole P, & en ſe ſervant de la formule * $yddy = dx^2 + dy^2$, dans laquelle dx a été ſuppoſée conſtante. Ayant imaginé une autre appliquée Pf qui faſſe avec PF l'angle FPf infiniment petit, & décrit du centre P les petits arcs FG, DH, on nommera les connues AB, a; BP, b; & les inconnues PF, y; PD, z; & l'on aura par la propriété de la conchoïde $y = z + a$; ce qui donne $dy = dz$. Or à cauſe

du triangle rectangle DBP, $DB = \sqrt{zz - bb}$; & à cauſe des triangles ſemblables DBP & dHD, PDH & PFG, l'on aura $DB\ (\sqrt{zz - bb}) . BP\ (b) :: dH\ (dz) . HD = \frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}$. Et $PD\ (z) . PF\ (z + a) :: HD\ \left(\frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}\right) . FG\ (dx) = \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{zz - bb}}$. D'où l'on tire dz ou $dy = \frac{zdx\sqrt{zz - bb}}{bz + ab}$, dont la différence eſt (en ſuppoſant dx conſtante) $ddy = \frac{\overline{bz^3 + 2abzz - ab^3} \times dzdx}{\overline{bz + ab}^2 \sqrt{zz - bb}} = \frac{\overline{bz^4 + 2abz^3 - ab^3z} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^3}$ en mettant pour dz ſa valeur. Donc ſi l'on ſubſtitue dans la formule générale * $yddy = dx^2 + dy^2$ à la place de y ſa valeur $z + a$, & de dy & ddy les valeurs que l'on vient de trouver en dx & dx^2, on formera cette équation $\frac{\overline{z^4 + 2az^3 - abbz} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^2} = \frac{\overline{z^4 + 2abbz + aabb} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^2}$ qui ſe réduit à $2z^3 - 3bbz - abb = 0$, dont l'une des racines augmentée de a fournit la valeur de l'inconnue PF. * *Art.* 66.

Si $a = b$, l'on aura $2z^3 - 3aaz - a^3 = 0$, qui étant diviſée par $z + a$, donne $zz - az - \frac{aa}{2} = 0$, dont la réſolution fournit $PF\ (z + a) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{3a + a\sqrt{3}}{2}$.

EXEMPLE V.

72. Soit une autre eſpece de Conchoïde AFK, telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques F au pole P la droite PF qui coupe l'aſymptote BC en D, le rectangle $PD \times DF$ ſoit toujours égal au même rectangle $PB \times BA$. On demande le point d'inflexion F. FIG. 60.

Si l'on nomme les inconnues BE, x; EF, y; & les connues AB, a; BP, b; on aura $PD \times DF = ab$; & les paralleles BD, EF donneront $PD \times DF\ (ab) . PB \times BE\ (bx) :: \overline{PF}^2\ (bb + 2bx + xx + yy) . \overline{PE}^2\ (bb + 2bx + xx)$.

Donc $bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$, ou $yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}$, & $y = b + x\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ $= \sqrt{ax - xx} + b\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, dont la différence donne dy $= \frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$; & prenant encore la différence, on forme l'égalité $\frac{3aab - aax - 4abx \times dx^2}{4ax - 4x^2 \times \sqrt{ax - x^2}} = o$, qui se réduit à $x = \frac{3ab}{a + 4b}$ valeur de l'inconnue BE.

Si l'on fait $\frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$ valeur de dy égale à zéro, l'on aura $xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = o$, dont les deux racines $\frac{a + \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ & $\frac{a - \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ fournissent, lorsque a sur-

Fig. 61. passe $8b$, deux valeurs de BH & BL, telles que l'appliquée HM est moindre que ses voisines, & l'appliquée LN plus grande, c'està-dire que les tangentes en M & N seront paralleles à l'axe AB; & alors le point E tombera entre les points H & L.

Fig. 62. Mais lorsque $a = 8b$, les lignes BH, BE, BL seront égales chacune à $\frac{1}{4}a$; & alors la tangente au point d'inflexion F sera parallele à l'axe AB. Et enfin lorsque a est moindre que $8b$, les deux racines seront imaginaires; & par conséquent il n'y aura aucune tangente qui puisse être parallele à l'axe.

On pourroit encore résoudre cette question en prenant pour

Fig. 60. appliquées les lignes PF, Pf, qui partent du pole P, & en se servant de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$, comme l'on a fait dans l'exemple précédent.

EXEMPLE VI.

Fig. 63. 73. Soit un cercle AED qui ait pour centre le point B,

avec une ligne courbe AFK telle qu'ayant mené à discrétion le rayon BFE, le quarré de FE soit égal au rectangle de l'arc AE par une droite donnée b. Il faut déterminer dans cette courbe le point d'inflexion F.

Ayant nommé l'arc AE, z; le rayon BA ou BE, a; & l'appliquée BF, y; on aura $bz = aa - 2ay + yy$, & (en prenant les differences) $\frac{2ydy - 2ady}{b} = dz = Ee$. Or à cause des secteurs semblables BEe, BFG, on fera $BE\,(a) . BF\,(y) :: Ee\left(\frac{2ydy - 2ady}{b}\right) . FG\,(dx) = \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$, dont la différence, en supposant dx constante, donne $4ydy^2 - 2ady^2 + 2yyddy - 2ayddy = 0$; & partant $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}$. Si donc on substitue à la place de dx^2 & $yddy$ leurs valeurs en dy^2 dans la formule générale * $yddy = dx^2 + dy^2$, on formera l'équation $\frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a} = \frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb}$. * *Art.* 66.
qui se réduit à $4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb = 0$, dont la résolution fournira pour BF la valeur cherchée.

Il est évident que la courbe AFK, que l'on peut appeller une *Spirale parabolique*, doit avoir un point d'inflexion F. Car la circonférence AED ne différant pas d'abord sensiblement de la tangente en A, il suit de la nature de la parabole qu'elle doit d'abord être concave vers cette tangente, & qu'ensuite la courbure de la circonférence autour de son centre devenant sensible, elle doit devenir concave vers ce centre.

EXEMPLE VII.

74. Soit une ligne courbe AFK qui ait pour axe la droite AB, dont la propriété soit telle qu'ayant mené une tangente quelconque FB qui rencontre AB au point B, la partie interceptée AB soit toujours à la tangente BF en raison donnée de m à n. Il est question de déterminer le point de rebroussement F. FIG. 64.

Ayant nommé les inconnues & variables AE, x; EF, y; l'on aura $EB = -\frac{ydx}{dy}$ (parceque x croissant, y diminue), $FB = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$. Or par la propriété de la courbe, $AE + EB$ ou $AB \left(\frac{xdy - ydx}{dy}\right) . BF \left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right) :: m . n$. Donc $m\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{nxdy}{y} - ndx$, & sa différence donne $\frac{mdyddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{-nydxdy + nxyddy - nxdy^2}{yy}$ en supposant dx constante & négative; d'où l'on tire $ddy = \frac{-nydxdy - nxdy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{myydy - nxy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Maintenant si l'on fait cette fraction égale à zéro, on trouvera $-ydx - xdy = o$; ce qui ne fait rien connoître. C'est pourquoi il faut supposer cette fraction égale à l'infini, c'est-à-dire son dénominateur égal à zéro; ce qui donne $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{mydy}{nx} = \frac{nxdy - nydx}{my}$ à cause de l'équation à la courbe, d'où l'on tire $dx = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$. Or quarrant chaque membre de l'équation $mydy = nx\sqrt{dx^2+dy^2}$, on trouve encore $dx = \frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$, d'où l'on tire enfin $y\sqrt{mm - nn} = nx$; ce qui donne cette construction.

Soit décrit du diametre $AD = m$, un demi-cercle AID; & ayant pris la corde $DI = n$, soit tirée l'indéfinie AI. Je dis qu'elle rencontrera la courbe AFK au point de rebroussement F.

Car ayant mené IH perpendiculaire à AB, les triangles rectangles semblables DIA, IHA, FEA donneront DI $(n) . IA (\sqrt{mm - nn}) :: IH . HA :: FE (y) . EA (x)$. Et partant $y\sqrt{mm - nn} = nx$ qui étoit le lieu à construire.

Il eſt clair que BF eſt parallele à DI, puiſque $AB.BF :: AD(m).DI(n)$, d'où il ſuit que l'angle AFB eſt droit; & partant que les lignes AB, BF, BE ſont en proportion continue.

On peut trouver cette même propriété ſans aucun calcul, ſi l'on imagine * au même point de rebrouſſement F deux tangentes FB, Fb qui faſſent entre elles un angle BFb infiniment petit. Car décrivant du centre F le petit arc BL, on aura $m.n :: Ab.bF :: AB.BF :: Ab - AB$ ou $Bb.bF - BF$ ou $bL :: BF.BE$; à cauſe des triangles rectangles ſemblables BbL, FBE. Donc &c.

* *Art.* 67.

Si $m = n$, il eſt évident que la droite AF deviendra perpendiculaire ſur l'axe AB; & qu'ainſi la tangente FB ſera parallele à cet axe; ce que l'on ſait d'ailleurs devoir arriver, puiſqu'en ce cas la courbe AF doit être un demi-cercle qui ait ſon diametre perpendiculaire ſur l'axe AB. Mais ſi m étoit moindre que n, il eſt évident qu'il n'y auroit aucun point de rebrouſſement, parcequ'alors l'équation $y\sqrt{mm - nn} = nx$ renfermeroit une contradiction.

Soit encore propoſée la courbe qui a pour équation $ay^3 + bx^3 - c^3x = 0$. On en tirera $\frac{dy}{dx} = \frac{c^3 - 3bx^2}{3ay^2}$, & faiſant $c^3 - 3bx^2 = 0$, ces deux valeurs de x, $+c\sqrt{\frac{c}{3b}}$ & $-c\sqrt{\frac{c}{3b}}$. Ni l'une ni l'autre, étant ſubſtituée à x, ne fait diſparoître $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6bx}{3ay^2}$; il y a donc *maxima d'ordonnées* aux points déterminés par ces deux valeurs de x. Mais ſi l'on fait $\frac{dx}{dy} = 0$, d'où l'on tire $y = 0$, ou $bx^3 - c^3x = 0$, donc les trois racines ſont $x = 0$, $x = c\sqrt{\frac{c}{b}}$, $x = -c\sqrt{\frac{c}{b}}$: comme chacune de ces valeurs fait diſparoître $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{6ay + \frac{6bxdx^2}{dy^2}}{c^3 - 3bx^2}$,

sans que $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{6a + \frac{6bdx^3 + 6bxdxd^2x}{dy^3}}{c^3 - 3bx^2}$ devienne nulle ; il faut en conclure qu'à ces points il n'y a pas de *maxima* ou de *minima* d'abcisses ; ce sont des points d'inflexion qu'on eût déterminés de la même maniere en faisant $\frac{d^2x}{dy^2}$ ou $ay + bx\frac{dx^2}{dy^2} = 0$.



SECTION

SECTION V.

Usage du calcul des différences pour trouver les Développées.

DÉFINITION.

Si l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque *BDF* concave vers le même côté, soit enveloppée ou entourée d'un fil *ABDF*, dont l'une des extrémités soit fixe en *F*, & l'autre soit tendue le long de la tangente *BA*, & que l'on fasse mouvoir l'extrémité *A* en la tenant toujours tendue & en développant continuellement la courbe *BDF*; il est clair que l'extrémité *A* de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe *AHK*. FIG. 65.

Cela posé, la courbe *BDF* sera nommée la *Développée* de la courbe *AHK*.

Les parties droites *AB*, *HD*, *KF* du fil *ABDF* seront nommées les *rayons de la développée.*

COROLLAIRE I.

75. De ce que la longueur du fil *ABDF* demeure toujours la même, il suit que la portion de courbe *BD* est égale à la différence des rayons *DH*, *BA* qui partent de ses extrémités; de même la portion *DF* sera égale à la différence des rayons *FK*, *DH*; & la courbe entiere *BDF* à la différence des rayons *FK*, *BA*. D'où l'on voit que si le rayon *BA* de la courbe étoit nul, c'est-à-dire que si l'extrémité *A* du fil tomboit sur l'origine *B* de la courbe *BDF*, alors les rayons de la développée *DH*, *FK* seroient égaux aux portions *BD*, *BDF* de la courbe *BDF*.

COROLLAIRE II.

76. Si l'on considere la courbe *BDF* comme un poligone *BCDEF* d'une infinité de côtés; il est clair que l'extré- FIG. 66.

mité *A* du fil *ABCDEF* décrit le petit arc *AG* qui a pour centre le point *C*, jusqu'à ce que le rayon *CG* ne fasse plus qu'une ligne droite avec le petit côté *CD* voisin de *CB*; & de même qu'elle décrit le petit arc *GH* qui a pour centre le point *D*, jusqu'à ce que le rayon *DH* ne fasse plus qu'une droite avec le petit côté *DE*; & ainsi de suite jusqu'à ce que la courbe *BCDEF* soit entiérement développée. La courbe *AHK* peut être donc considérée comme l'assemblage d'une infinité de petits arcs de cercle *AG*, *GH*, *HI*, *IK*, &c. qui ont pour centre les points *C*, *D*, *E*, *F*, &c. D'où il suit,

1° Que les rayons de la développée la touchent continuellement comme *DH* en *D*, *KF* en *F*, &c. Et qu'ils sont tous perpendiculaires à la courbe *AHK* qu'ils décrivent, comme *DH* en *H*, *FK* en *K*, &c. Car *DH*, par exemple, est perpendiculaire sur le petit arc *GH* & sur le petit arc *HI*, puisqu'elle passe par leurs centres *D*, *E*. D'où l'on voit, 1°. que la développée *BDF* termine l'espace où tombent toutes les perpendiculaires à la courbe *AHK*. 2°. Que si l'on prolonge un rayon quelconque *HD* qui coupe le rayon *AB* en *R*, jusqu'à ce qu'il rencontre un autre rayon quelconque *KF* en *S*, l'on pourra toujours mener de tous les points de la partie *RS* deux perpendiculaires sur la courbe *AHK*, excepté du point touchant *D* duquel on n'en peut mener qu'une seule savoir *DH*. Car il est clair que l'intersection *R* des rayons *AB*, *DH* parcourt tous les points de la partie *RS*, pendant que le rayon *AB* décrit par son extrémité *A* la ligne *AHK* sur laquelle il est continuellement perpendiculaire : & que les rayons *AB*, *HD* ne se confondent que lorsque l'intersection *R* tombe sur le point touchant *D*.

FIG. 65. (margin note beside "voit, 1°. que la développée…")

FIG. 66. 2°. Que si l'on prolonge les petits arcs *HG* en *l*, *IH* en *m*, *KI* en *n*, &c. vers l'origine *A* du développement, chaque petit arc comme *IH* touchera en dehors son voisin *HG*, parceque les rayons *CA*, *DG*, *EH*, *FI* vont toujours en augmentant à mesure que les petits arcs qui composent la courbe *AHK*, s'éloignent du point *A*. Par la même raison

ſi l'on prolonge les petits arcs AG en o, GH en p, HI en q, vers le côté oppoſé au point A; chaque petit arc comme HI touchera en deſſous ſon voiſin IK. Or puiſque les points H & I, D & E peuvent être conſidérés comme tombant l'un ſur l'autre à cauſe de l'infinie petiteſſe, tant de l'arc HI, que du côté DE; il s'enſuit que ſi l'on décrit d'un point quelconque moyen D de la développée BDF comme centre, & de ſon rayon DH un cercle mHp, il touchera en dehors la partie HA qui tombera toute entiere au dedans de ce cercle, & en dedans de l'autre partie HK qui tombera toute entiere au dehors de ce même cercle : c'eſt-à-dire qu'il touchera & coupera la courbe AHK au même point H, de même que la tangente au point d'inflexion coupe la courbe dans ce point.

3°. Le rayon HD du petit arc HG, ne différant des rayons CG, EH, des arcs voiſins GA, HI, que d'une quantité infiniment petite CD ou DE; il s'enſuit que pour peu qu'on diminue le rayon DH, il ſera moindre que CG, & qu'ainſi ſon cercle touchera en deſſous la partie HA; & qu'au contraire pour peu qu'on l'augmente, il ſurpaſſera HE, & qu'ainſi ſon cercle touchera en dehors la partie HK, de ſorte que le cercle mHp eſt le plus petit de tous ceux qui touchent en dehors la partie HA, & au contraire le plus grand de tous ceux qui touchent en dedans la partie HK : c'eſt-à-dire qu'entre ce cercle & la courbe on n'en peut faire paſſer aucun autre.

4°. Comme la courbure des cercles augmente à proportion que leurs rayons diminuent, il s'enſuit que la courbure du petit arc HI ſera à la courbure du petit arc AG réciproquement comme le rayon BA ou CA de ce dernier eſt à ſon rayon DH ou EH : c'eſt-à-dire que la courbure en H de la courbe AHK ſera à ſa courbure en A comme le rayon BA au rayon DH; & de même que la courbure en K eſt à la courbure en H comme le rayon DH eſt au rayon FK. D'où l'on voit que la courbure de la ligne AHK diminue continuellement à meſure que la ligne BDF ſe développe; de ſorte qu'au point A où commence le dévelop-

pement, elle eſt la plus grande qu'il eſt poſſible; & au point K, où je ſuppoſe qu'il ceſſe, la plus petite.

5°. Que les points de la développée ne ſont autre choſe que le concours des perpendiculaires menées par les extrémités des petits arcs qui compoſent la courbe AHK. Par exemple, le point D ou E eſt le concours des perpendiculaires HD, IE, du petit arc HI; de ſorte que ſi la courbe AHK eſt donnée avec la poſition d'une de ſes perpendiculaires HD, pour trouver le point D ou E, où elle touche la développée; il ne faut que chercher le point de concours des perpendiculaires infiniment proches HD, IE: c'eſt ce qu'on va enſeigner dans le Problême qui ſuit.

PROPOSITION I.

Problême général.

FIG. 67. 77. *La nature de la ligne courbe* AMD *étant donnée avec une de ſes perpendiculaires quelconque* MC; *déterminer la longueur du rayon* MC *de ſa développée : c'eſt-à-dire le concours des perpendiculaires infiniment proches* MC, mC.

Suppoſons en premier lieu que la ligne courbe AMD ait pour axe la ligne droite AB ſur laquelle les appliquées PM ſoient perpendiculaires. On imaginera une autre appliquée mp, qui ſera infiniment proche de MP; puiſque le point m eſt ſuppoſé infiniment près de M. On menera par le point de concours C une parallele CE à l'axe AB, laquelle rencontre les appliquées MP, mp aux points E, e. Enfin menant MR parallele à AB, on formera les triangles rectangles ſemblables MRm, MEC; car les angles EMR, CMm étant droits, & l'angle CMR leur étant commun, l'angle EMC ſera égal à l'angle RMm.

Si donc l'on nomme les données AP, x; PM, y; l'inconnue ME, z; l'on aura Ee ou Pp ou $MR = dx$ $Rm = dy = dz$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; & $MR\,(dx) . Mm\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) :: ME\,(z) . MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. Or le point

C étant le centre du petit arc Mm, son rayon CM qui devient Cm lorsque EM augmente de sa différence Rm, demeure le même. Sa différence sera donc nulle : ce qui donne (en supposant dx constante) $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0$; d'où l'on tire $ME(z) = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy} = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$ en mettant pour dz sa valeur dy.

Supposons en second lieu que les appliquées BM, Bm partent toutes d'un même point B. Ayant mené du point cherché C sur les appliquées, que je suppose infiniment proches, les perpendiculaires CE, Ce, & décrit du centre B le petit arc MR; on formera les triangles rectangles semblables RMm & EMC, BMR, BEG & CeG. C'est pourquoi nommant BM, y; ME, z; MR, dx; on aura $Rm = dy$, $Mm = \sqrt{dx^2+dy^2}$, CE ou $Ce = \frac{zdy}{dx}$, & $MC = \frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$. On trouvera ensuite, comme dans le premier cas, $z = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy}$. Or $BM(y) . Ce\left(\frac{zdy}{dx}\right) :: MR (dx) . Ge = \frac{zdy}{y}$, & $me - ME$ ou $Rm - Ge = dz = \frac{ydy - zdy}{y}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz, l'on aura $ME (z) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$.

Fig. 68.

Si l'on suppose que y soit infinie, les termes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport à $yddy$; & par conséquent cette derniere formule se changera en celle du cas précédent. Ce qui doit aussi arriver; puisque les appliquées deviennent alors paralleles entre elles, & que l'arc MR devient une droite perpendiculaire sur les appliquées.

Maintenant la nature de la courbe AMD étant donnée, on trouvera des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2 ou de dx^2 & ddy en dy^2, lesquelles étant substituées dans les formules précédentes, donneront pour ME une valeur délivrée des différences, & entiérement connue. Et menant EC perpen-

diculaire sur ME, elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe, au point cherché C. Ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE I.

FIG. 67. 68. 78. A cause des triangles rectangles semblables MRm & MEC, l'on aura dans le premier cas $MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, & dans le second $MC = \frac{\overline{ydx^2 + ydy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$.

NOTE V.

FIG. 5, pl. A. Je suppose que deux rayons de courbure HD, KF se coupent en un point S, & que de ce point comme centre, avec un rayon égal à l'unité, on décrive l'arc $\alpha\beta$. D'après la définition, il est clair que plus le point K approchera du point H, plus le rapport entre l'arc $\alpha\beta$ & l'arc HK de la courbe, approchera du rapport qu'il y auroit entre le même arc $\alpha\beta$, & un autre arc décrit du point S comme centre avec le rayon SH; rapport qui n'est autre que celui de 1 à SH, lequel approche continuellement de celui de 1 à DH. On voit donc que le rapport de l'unité au rayon de courbure, est égal à ce que devient au point H le rapport entre l'arc $\alpha\beta$ & l'arc HK de la courbe; ou, ce qui est précisément la même chose, à ce que devient le rapport entre les différences finies de l'angle HRA (car l'angle extérieur ZVS étant égal aux deux intérieurs opposés VRS & VSR, on a VSR, qui a pour mesure $\alpha\beta$, égal à $KVA - HRA$) & de l'arc AH de la courbe, lorsque ces différences deviennent nulles; c'est-àdire que $DH = \frac{dAH}{dARH}$. Il faut remarquer que lorsque la courbe est concave, les angles que forment les normales avec la ligne des abcisses, vont en augmentant en partant de l'origine des co-ordonnées; & qu'au contraire ces mêmes angles vont en diminuant quand la courbe est convexe. Cela posé, en nommant s l'arc AH, on a (Note 2, n°. 1.) $ds : dx :: 1 : \text{sin}.\, HRA$, $ds : dy :: 1 : \text{cos}.\, HRA$; d'où l'on tire $dHRA$ $\left(= \frac{d\,\text{sin}.\, HRA}{\text{cos}.\, HRA}\right) = \frac{\pm dsd\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}$, ou $dHRA$ $\left(= \frac{-d\,\text{cos}.\, HRA}{\text{sin}.\, HRA}\right)$

$= \frac{\mp ds\, d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{dx}$. Donc $DH = \frac{dy}{\pm d\left(\frac{dx}{ds}\right)}$ ou $DH = \frac{dx}{\mp d\left(\frac{dy}{ds}\right)}$; dans la premiere formule le ſigne $+$ eſt pour la courbe concave, & le ſigne $-$ pour la courbe convexe, c'eſt le contraire dans la ſeconde formule. Mais $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ & $d\frac{dx}{ds}$ $= \frac{-\frac{dy}{dx}\, d\frac{dy}{dx}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$; on tirera donc de la premiere formule, DH $= \frac{dx\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\mp d\frac{dy}{dx}}$; on auroit trouvé la même choſe ſi l'on eût ſubſtitué dans la ſeconde formule pour $d\frac{dy}{ds}$ ſa valeur $\frac{d\frac{dy}{dx}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

REMARQUE.

79. Il y a encore pluſieurs autres manieres de trouver les rayons de la développée. J'en mettrai ici une partie, afin de donner différentes ouvertures à ceux qui ne poſſedent pas encore ce calcul.

Premier cas pour les courbes dont les appliquées ſont perpendiculaires à l'axe.

Premiere maniere. Soit prolongée MR en G où elle rencontre la perpendiculaire mC. Les angles droits MRm, MmG donneront $RG = \frac{dy^2}{dx}$; & par conſéquent MG $= \frac{dx^2+dy^2}{dx}$. Or à cauſe des triangles ſemblables MRm, MPQ (les points Q, q marquent les interſections des perpendiculaires infiniment proches MC, mC avec l'axe AB) il vient $MQ = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$, $PQ = \frac{ydy}{dx}$; & partant AQ FIG. 67.

$= x + \frac{ydy}{dx}$, dont la différence donne (en prenant dx pour conſtante) $Qq = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx}$; & à cauſe des triangles ſemblables CMG, CQq, l'on aura $MG - Qq\left(\frac{-yddy}{dx}\right) . MG \left(\frac{dx^2+dy^2}{dx}\right) :: MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Seconde maniere. Ayant décrit du centre C le petit arc QO, les petits triangles rectangles QOq, MRm ſeront ſemblables, puiſque Mm, QO & MR, Qq ſont paralleles; & partant $Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2}) . MR(dx) :: Qq\left(\frac{dx^2+dy^2+yddy}{dx}\right) . QO = \frac{dx^2+dy^2+yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les ſecteurs ſemblables CMm, CQO donnent $Mm - QO\left(\frac{-yddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) . Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Troiſieme maniere. Menant les tangentes infiniment proches MT, mt, on aura $PT - AP$ ou $AT = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence donne $Tt = -\frac{ydxddy}{dy^2}$; & décrivant du centre m le petit arc TH, on formera le triangle rectangle HTt ſemblable à RmM; car les angles HtT, RMm ou PTM ſont égaux, ne différant entre eux que de l'angle Tmt qui eſt infiniment petit; ce qui donne $Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2})$.
$mR(dy) :: Tt\left(-\frac{ydxddy}{dy^2}\right) . TH = \frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les Fig. 67.
ſecteurs TmH, MCm ſont ſemblables, car l'angle $Tmt + MmC$ vaut un droit, & l'angle $MmC + MCm$ vaut auſſi un droit, à cauſe du triangle CMm conſidéré comme rectangle en M. Donc $TH\left(-\frac{ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) . Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: Tm$ ou $TM\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Quatrieme

Quatrieme maniere. On marquera * les différences secondes en prenant dx pour constante ; & les triangles rectangles semblables HmS, Hnk donneront Hm ou Mm $(\sqrt{dx^2+dy^2}) . mS$ ou $MR\,(dx) :: Hn\,(-ddy) . nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or l'angle kmn est égal à celui que font entre elles les tangentes aux points M, m ; & partant, comme l'on vient de prouver, égal à l'angle MCm ; d'où il suit que les secteurs nmk, MCm sont semblables, & qu'ainsi nk $\left(-\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) . mk$ ou * $Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: Mm$ $(\sqrt{dx^2+dy^2}) . MC = \frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$. On prend mH ou Mm pour mk, parcequ'elles ne different entre elles que de la petite droite Hk infiniment moindre qu'elles ; de même que Hn est infiniment moindre que Rm ou Sn.

* *Art.* 64. Fig. 69.

* *Art.* 2.

Second cas pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point fixe.

Premiere maniere. Ayant mené du point fixe B les perpendiculaires BF, Bf sur les rayons infiniment proches CM, Cm ; les triangles rectangles mMR, BMF, qui sont semblables (puisqu'ajoutant aux angles mMR, BMF le même angle FMR, ils composent chacun un angle droit), donneront MF ou $MH = \frac{ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, & $BF = \frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ dont la différence (en prenant dx pour constante) est $Bf - BF$ ou $Hf = \frac{dx^2dy^2+dy^4+ydx^2ddy}{dx^2+dy^2\times\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or à cause des secteurs semblables CMm, CHf, on forme cette proportion $Mm - Hf . Mm :: MH . MC$, & partant $MC = \frac{ydx^2+ydy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy}$.

Fig. 68.

Seconde maniere. On marquera * les différences secondes en supposant dx constante ; & les secteurs semblables

* *Art.* 64. Fig. 70.

BmS, mEk donneront $Bm(y) . mS(dx) :: mE(\sqrt{dx^2+dy^2})$. $Ek = \frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$. Or à cauſe des triangles rectangles ſemblables HmS, Hnk, l'on aura Hm ou $Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})$. mS ou $MR(dx) :: Hn(-ddy) . nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Et partant $En = \frac{dx^3+dxdy^2-ydxddy}{y\sqrt{dx^2+dy^2}}$; & prenant une troiſieme proportionnelle à En, Em ou Mm, les ſecteurs ſemblables Emn, MCm donneront pour MC la même valeur qu'auparavant.

Si l'on nomme $Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})$, du; & qu'on prenne dy pour conſtante au lieu de dx, on trouvera dans le premier cas $MC = \frac{du^3}{dyddx}$, & dans le ſecond $MC = \frac{ydu^3}{dxdu^2+ydyddx}$. Et enfin ſi l'on prend du pour conſtante, il vient dans le premier cas $MC = \frac{dxdu}{-ddy}$ ou $\frac{dydu}{ddx}$ (parceque la différence de $dx^2+dy^2 = du^2$ eſt $dxddx + dyddy = o$, & qu'ainſi $\frac{dx}{-ddy} = \frac{dy}{ddx}$); & dans le ſecond, $MC = \frac{ydxdu}{dx^2-yddy}$ ou $\frac{ydydu}{dxdy+yddx}$.

COROLLAIRE II.

FIG. 72. 80. Comme l'on ne trouve pour ME ou MC qu'une ſeule valeur, il s'enſuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une ſeule développée BCG.

COROLLAIRE. III.

FIG. 67. 68. 81. Si la valeur de ME $\left(\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}\right)$ ou $\left(\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2+dy^2-yddy}\right)$ eſt poſitive, il faudra prendre le point E du même côté de l'axe AB ou du point B, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul; d'où l'on voit que la courbe ſera alors concave

vers cet axe ou ce point. Mais ſi la valeur de *ME* eſt négative, il faudra prendre le point *E* du côté oppoſé ; d'où l'on voit que la courbe ſera alors convexe. De ſorte qu'au point d'inflexion ou de rebrouſſement qui ſépare la partie concave de la convexe, la valeur de *ME* doit devenir de poſitive négative ; & partant les perpendiculaires infiniment proches ou contiguës doivent devenir de convergentes divergentes. Or cela ne ſe peut faire qu'en deux manieres. Car ou elles vont en croiſſant à meſure qu'elles approchent du point d'inflexion ou de rebrouſſement ; & il faudra pour lors qu'elles deviennent paralleles, c'eſt-à-dire que le rayon de la développée ſoit infini : ou elles vont en diminuant ; & il faudra néceſſairement alors qu'elles tombent l'une ſur l'autre, c'eſt-à-dire que le rayon de la développée ſoit zéro. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que l'on a démontré dans la ſection précédente.

REMARQUE.

82. Comme l'on a cru juſqu'ici que le rayon de la développée étoit toujours infiniment grand au point d'inflexion, il eſt à propos de faire voir qu'il y a, pour ainſi dire, une infinité de genres de courbes qui ont toutes dans leur point d'inflexion le rayon de la développée égal à zéro ; au lieu qu'il n'y en a qu'un ſeul genre dans lequel ce rayon ſoit infini.

Soit *BAC* une des courbes qui ont dans leur point d'inflexion *A* le rayon de la développée infini. Si l'on développe les parties *BA*, *AC*, en commençant au point *A* ; il eſt clair qu'on formera une ligne courbe *DAE* qui aura auſſi un point d'inflexion dans le même point *A*, mais dont le rayon de la développée en ce point ſera égal à zéro. Et ſi l'on formoit de la même ſorte une troiſieme courbe par le développement de la ſeconde *DAE*, & une quatrieme par le développement de la troiſieme, & ainſi de ſuite à l'infini ; il eſt clair que le rayon de la développée dans le point d'inflexion *A* de toutes ces courbes, ſeroit toujours égal à zéro. Donc, &c. FIG. 71.

PROPOSITION II.

Problême.

Fig. 72. 83. *Trouver dans les courbes* AMD, *où l'axe* AB *fait avec la tangente en* A *un angle droit*, *le point* B *où cet axe touche la développée* BCG.

Si l'on suppose que le point M devienne infiniment près du sommet A, il est clair que la perpendiculaire MQ rencontrera l'axe au point cherché B; d'où il suit que si l'on cherche en général la valeur de PQ $\left(\frac{ydy}{dx}\right)$ en x ou en y, & qu'on fasse ensuite x ou $y = o$, on déterminera le point P à tomber sur le point A, & le point Q sur le point cherché B; c'est-à-dire que PQ deviendra alors égale à la cherchée AB. Ceci s'éclaircira par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

Fig. 72. 84. Soit la courbe AMD une Parabole qui ait pour parametre la droite donnée a. L'équation à la parabole est $ax = yy$, dont la différence donne $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$; & prenant la différence de cette derniere équation, en supposant dx constante, on trouve $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de dy & de ddy dans la formule

* Art. 77. $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on aura * $ME = \frac{a + 4x\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe, la ligne TE parallele à MC; je dis qu'elle rencontre MP prolongée au point cherché E. Car les angles droits MPT, MTE donnent $MP\ (\sqrt{ax}) . PT\ (2x) :: PT\ (2x) . PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, & par conséquent $MP + PE = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

De plus à cauſe des triangles rectangles MPQ, MEC, l'on aura $PM(\sqrt{ax}).PQ(\frac{1}{2}a)::ME\left(\sqrt{ax}+\frac{4x\sqrt{ax}}{a}\right)$. EC ou $PK=\frac{1}{2}a+2x$, & partant $QK=2x$. Ce qui donne cette nouvelle conſtruction.

Soit priſe QK double de AP, ou (ce qui revient au même) ſoit priſe PK égale à TQ, & ſoit menée KC parallele à PM. Elle rencontrera la perpendiculaire MC en un point C qui ſera à la développée BCG.

Autre maniere. $yy=ax$, & $2ydy=adx$ dont la différence (en ſuppoſant dx conſtante) donne $2dy^2+2yddy=0$; d'où l'on tire $-ddy=\frac{dy^2}{y}$. Et mettant cette valeur dans la formule $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, on trouve * $ME=\frac{ydy^2+ydx^2}{dy^2}$; & partant EC ou $PK=\frac{ydy^2+ydx^2}{dydx}=\frac{ydy}{dx}+\frac{ydx}{dy}=PQ+PT$ ou TQ. Ce qui donne les mêmes conſtructions qu'auparavant. Car $MP.PT::dy.dx::PT\left(\frac{ydx}{dy}\right).PE=\frac{ydx^2}{dy^2}=\frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. * *Art.* 77.

Pour trouver à préſent le point B où l'axe AB touche la développée BCG. On a $PQ\left(\frac{ydy}{dx}\right)=\frac{1}{2}a$. Or comme cette quantité eſt conſtante, elle demeurera toujours la même, en quelque endroit que ſe trouve le point M. Et ainſi, lorſqu'il tombe ſur le ſommet A, l'on aura encore PQ qui devient en ce cas $AB=\frac{1}{2}a$.

Pour trouver la nature de la développée BCG à la maniere de *Deſcartes*. On nommera la coupée BK, u; l'appliquée KC ou PE, t; d'où l'on aura $CK(t)=\frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ & $AP+PK-AB(u)=3x$; mettant donc pour x ſa valeur $\frac{1}{3}u$ dans l'équation $t=\frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, l'on en formera une nouvelle $27att=16u^3$ qui exprimera la relation de BK à

KC. D'où l'on voit que la développée BCG de la parabole ordinaire eſt une ſeconde parabole cubique dont le parametre eſt égal à $\frac{27}{16}$ du parametre de la parabole donnée.

Fig. 73. Il eſt viſible que la développée CBC de la parabole commune entiere MAM a deux parties CB, BC qui ont leurs convexités oppoſées l'une à l'autre; de ſorte qu'elles forment en B un point de rebrouſſement.

Avertissement.

Fig. 72. *On entend par* courbes géométriques AMD, BCG *celles dont la relation des coupées* AP, BK *aux appliquées* PM, KC, *ſe peut exprimer par une équation où il ne ſe rencontre point de différences*; *& on prend pour* géométrique *tout ce qu'on peut faire par le moyen de ces lignes. L'on ſuppoſe ici que les coupées & les appliquées ſoient des lignes droites.*

Corollaire.

85. Lorſque la courbe donnée AMD eſt géométrique, il eſt clair que l'on pourra toujours trouver (comme dans cet exemple) une équation qui exprime la nature de ſa développée BCG; & qu'ainſi cette développée ſera auſſi géométrique. Mais je dis de plus qu'elle ſera rectifiable, c'eſt-à-dire qu'on pourra trouver géométriquement des lignes droites égales à une de ſes portions quelconques BC; car il eſt évi-
* Art. 75. dent * que l'on déterminera avec le ſecours de la ligne AMD, qui eſt géométrique, ſur la tangente CM de la portion BC, un point M tel que la droite CM ne différera de la portion BC que d'une droite donnée AB.

Exemple II.

Fig. 74. 86. Soit la courbe donnée MDM une Hyperbole entre ſes aſymptotes, qui ait pour équation $aa = xy$.

On aura $\frac{aa}{y} = x$, $\frac{-aady}{yy} = dx$, & ſuppoſant dx conſ-

tante, * $\frac{-aayyddy+2aaydy^2}{y^4}=o$; d'où l'on tire $ddy=\frac{2dy^2}{y}$; & * *Art.* 1.
mettant cette valeur dans $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, il vient * $ME\frac{ydx^2+ydy^2}{-2dy^2}$: * *Art.* 77.
de sorte que EC ou $PK=-\frac{ydy}{2dx}-\frac{ydx}{2dy}$. Ce qui donne ces constructions.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'asymptote AB, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre MP prolongée en S; soit prise ME égale à la moitié de MS de l'autre côté de l'asymptote (que l'on regarde ici comme l'axe) parceque sa valeur est négative; ou bien soit prise PK égale à la moitié de TQ du même côté du point T : je dis que si l'on mene EC parallele ou KC perpendiculaire à l'axe, elles couperont la droite MC au point cherché C. Car il est clair que $MS=\frac{ydx^2+ydy^2}{dy^2}$, & que $TQ=\frac{ydy}{dx}+\frac{ydx}{dy}$.

Si l'on fait quelque attention sur la figure de l'hyperbole MDM, on verra que sa développée CLC doit avoir un point de rebroussement L, de même que la développée de la parabole. Pour le déterminer je remarque que le rayon DL de la développée est plus petit que tout autre rayon MC; d'où il suit que la différence de son expression * * *Art.* 78.
$\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ sera * nulle ou infinie. * *Sect.* 3.
Ce qui donne, en prenant toujours dx pour constante,
$\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}=o$ ou ∞; d'où en divisant par $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$, & multipliant ensuite par $dxddy^2$, on tire cette équation $dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2=o$ ou ∞, qui servira à trouver pour x une valeur AH telle que menant l'appliquée HD & le rayon DL de la développée, le point L sera le point de rebroussement cherché.

On a dans cet exemple $y = \frac{aa}{x}$, $dy = \frac{-aadx}{xx}$, $ddy = \frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy = \frac{-6aadx^3}{x^4}$. C'eſt pourquoi mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $AH\,(x) = a$. D'où il ſuit que le point D eſt le ſommet de l'hyperbole, & que les lignes AD, DL ne font qu'une même droite AL qui en eſt l'axe.

EXEMPLE III.

FIG. 72. 74. 87. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les Paraboles à l'infini lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les Hyperboles lorſqu'il marque un nombre négatif.

On aura $my^{m-1}\,dy = dx$ dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $\overline{mm - m}\,y^{m-2}\,dy^2 + my^{m-1}\,ddy = o$; & en diviſant par my^{m-1}, il vient $-ddy = \frac{\overline{m-1}\,dy^2}{y}$; d'où mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on tirera * $ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{\overline{m-1}\,dy^2}$; & partant EC ou $PK\ \frac{ydy}{\overline{m-1}\,dx} + \frac{ydx}{\overline{m-1}\,dy}$. * Art. 77.

Ce qui donne ces conſtructions générales.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe AP, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre MP prolongée au point S; ſoit priſe $ME = \frac{1}{m-1}MS$, ou bien ſoit priſe $PK = \frac{1}{m-1}TQ$: il eſt clair que ſi l'on mene par le point E une parallele, ou par le point K une perpendiculaire à l'axe, elles rencontreront MC au point cherché C.

FIG. 74. Si m eſt négatif, comme il arrive dans les hyperboles, la valeur de ME ſera négative; & par conſéquent elles ſeront convexes vers leur axe qui ſera alors une aſymptote. Mais dans les paraboles où m eſt poſitif, il peut arriver deux

FIG. 75. cas. Car ou m ſera moindre que 1, & alors elles ſeront

convexes

convexes du côté de leur axe, qui ſera une tangente au ſommet : ou m ſurpaſſe 1, & alors elles ſeront concaves vers leur axe qui ſera perpendiculaire au ſommet. FIG. 72.

Pour trouver dans ce dernier cas le point B où l'axe AB touche la développée. On a $PQ\left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{y^{2-m}}{m}$; ce qui donne trois differents cas. Car ou $m=2$, ce qui n'arrive que dans la parabole ordinaire, & alors l'expoſant de y étant nul, cette inconnue s'évanouit; & par conſéquent $AB=\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire à la moitié du parametre. Ou m eſt moindre que 2, & alors l'expoſant de y étant poſitif, elle ſe trouvera dans le numérateur, ce qui rend (en l'égalant * à zéro) la fraction nulle : c'eſt-à-dire que le point B tombe en ce cas ſur le point A comme dans la ſeconde parabole cubique $axx=y^3$. Ou enfin m ſurpaſſe 2, & alors l'expoſant de y étant négatif, elle ſera dans le dénominateur, ce qui rend (lorſqu'elle devient zéro) la fraction infinie : c'eſt-à-dire que le point B eſt infiniment éloigné du point A, ou (ce qui eſt la même choſe) que l'axe AB eſt aſymptote de la développée comme dans la premiere parabole cubique $aax=y^3$. On peut remarquer dans ce dernier cas que la développée CLO de la demi-parabole ADM a un point de rebrouſſement L; de ſorte que par le développement de la partie LO continuée à l'infini, le point D ne décrit que la portion déterminée DA, au lieu que par le développement de l'autre partie LC continuée auſſi à l'infini, il décrit la portion infinie DM. * Art. 83. FIG. 76. FIG. 77.

On déterminera le point L de même que dans l'hyperbole. Soit, par exemple, $aax=y^3$ ou $y=x^{\frac{1}{3}}$, on aura $dy=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$, $ddy=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}dx^2$, $dddy=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}dx^3$; & ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation $dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2=0$, on trouvera * $AH(x)=\sqrt[4]{\frac{1}{91125}}$. Il en eſt ainſi des autres. * Art. 86.

REMARQUE.

88. En ſuppoſant que m ſurpaſſe 1, afin que les paraboles ſoient toujours concaves du côté de leur axe, il peut arriver différens cas. Car ſi le numérateur de la fraction marquée par m eſt pair, & le dénominateur impair; toutes les paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une poſition ſemblable à celle de la parabole ordinaire. Mais ſi le numérateur & dénominateur ſont chacun impair; elles ont une poſition renverſée de part & d'autre de leur axe, enſorte que leur ſommet A eſt un point d'inflexion, comme la premiere parabole cubique $x = y^{\frac{3}{1}}$ ou $aax = y^3$. Enfin ſi le numérateur étant impair, le dénominateur eſt pair; elles ont une poſition renverſée du même côté de leur axe, enſorte que leur ſommet A eſt un point de rebrouſſement, comme la ſeconde parabole cubique $x = y^{\frac{3}{2}}$ ou $axx = y^3$. Tout cela ſuit de ce qu'une puiſſance paire ne peut pas avoir une valeur négative. Cela poſé, il eſt évident,

FIG. 73. FIG. 77. FIG. 76.

FIG. 77. 1°. Que dans le point d'inflexion A, le rayon de la développée peut être infiniment grand comme dans $aax = y^3$, ou infiniment petit comme dans $aax^3 = y^5$.

FIG. 76. 2°. Que dans le point de rebrouſſement A, le rayon de la développée peut être ou infini comme dans $a^3xx = y^5$, ou zéro comme dans $axx = y^3$.

FIG. 73. 3°. Qu'il ne s'enſuit pas de ce que le rayon de la développée eſt infini ou zéro, que les courbes aient alors un point d'inflexion ou de rebrouſſement. Car dans $a^3x = y^4$ il eſt infini, dans $ax^3 = y^4$ il eſt nul; & cependant ces paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une poſition ſemblable à celle de la parabole ordinaire.

EXEMPLE IV.

FIG. 78. 79. 89. Soit la courbe AMD une Hyperbole ou une Ellipſe qui ait pour axe AH (a), & pour parametre AF (b).

On aura par la proprieté de ces lignes $y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{\sqrt{a}}}$, $dy = \frac{abdx \mp 2\,bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$, & $ddy = \frac{-\,a^3bbdx^2}{4aabx \mp 4abxx\sqrt{aabx \mp abxx}}$. Si donc l'on met ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-\,dxddy}$ expression generale de * MC, on trouvera dans ces deux courbes $MC =$ * *Art.* 78.

$$\frac{\overline{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a^3bb}$$

$= \frac{4\,MQ^3}{bb}$, puisque de part & d'autre $MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) = \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a}$. Ce qui donne cette construction qui sert aussi pour la parabole.

Soit prise MC quadruple de la quatrieme continuellement proportionnelle au parametre AF & à la perpendiculaire MQ terminée par l'axe; le point C sera à la developpée.

Si l'on fait $x = o$, on aura * $AB = \frac{1}{2}b$. Et si l'on fait dans * *Art.* 83. l'ellipse $x = \frac{1}{2}a$, on trouvera $DG = \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'est-à-dire égal Fig. 79. à la moitié du parametre du petit axe. D'où l'on voit que dans l'ellipse la developpée BCG se termine en un point G du petit axe DO où elle forme un point de rebroussement; au lieu que dans la parabole & l'hyperbole elle s'étend à l'infini.

Si $a = b$ dans l'ellipse, il vient $MC \frac{1}{2}a$; d'où il suit que tous les rayons de la developpée sont égaux entre eux, & qu'elle ne sera par consequent qu'un point : c'est-à-dire que l'ellipse devient en ce cas un cercle qui a pour developpée son centre. Ce que l'on sait d'ailleurs être veritable.

Exemple V.

90. Soit la courbe AMD une logarithmique ordinaire, Fig. 80. dont la nature est telle qu'ayant mené d'un de ses points quel-

conque M la perpendiculaire MP ſur l'aſymptote KP, & la tangente MT; la ſous-tangente PT ſoit toujous égale à la même droite donnée a.

On a donc $PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) = a$, d'où l'on tire $dy = \frac{ydx}{a}$, dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$; & mettant ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on
* Art. 77. trouve * $ME = \frac{-aa-yy}{y}$; & partant EC ou $PK = \frac{-aa-yy}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit priſe PK égale à TQ du même côté de T, parceque ſa valeur eſt négative; & ſoit menée KC parallele à PM: je dis qu'elle rencontrera la perpendiculaire MC au point cherché C. Car $TQ = \frac{aa+yy}{a}$.

Si l'on veut que le point M ſoit celui de la plus grande courbure, on ſe ſervira de la formule $dx^2dddy + dy^2dddy$
* Art. 86. $-3dyddy^2 = 0$, que l'on a trouvée * dans l'exemple ſecond; & mettant pour dy, ddy, $dddy$, leurs valeurs $\frac{ydx}{a}$, $\frac{ydx^2}{aa}$, $\frac{ydx^3}{a^3}$, on trouvera $PM(y) = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Il eſt clair, en prenant dx pour conſtante, que les appliquées y ſont entre elles comme leurs différences dy ou $\frac{ydx}{a}$; d'où il ſuit qu'elles ſont auſſi une progreſſion géométrique. Car ſi l'on conçoit que l'aſymptote ou l'axe PK ſoit diviſé en un nombre infini de petites parties égales Pp ou MR, pf ou mS, fg ou nH, &c. compriſes entre les appliquées PM, pm, fn, go, &c. l'on aura $PM.pm :: Rm.Sn :: PM + Rm$ ou $pm.pm + Sn$ ou Fn. On prouve de même que $pm.fn :: fn.go$, & ainſi de ſuite. Les appliquées PM, pm, fn, go, &c. feront donc entre elles une progreſſion géométrique.

EXEMPLE VI.

91. Soit la courbe AMD une logarithmique ſpirale, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconque M au point fixe A, qui en eſt le centre, la droite MA & la tangente MT; l'angle AMT ſoit par-tout le même. FIG. 81.

L'angle AMT ou AmM étant conſtant, la raiſon de $mR\,(dy)$ à $RM\,(dx)$ ſera auſſi conſtante. Il faut donc que la différence de $\frac{dy}{dx}$ ſoit nulle; ce qui donne (en ſuppoſant dx conſtante) $ddy = o$. C'eſt pourquoi, effaçant le terme $yddy$ dans $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ expreſſion * générale de ME lorſque les appliquées partent toutes d'un même point, on trouve $ME = y$, c'eſt-à-dire $ME = AM$. Ce qui donne cette conſtruction. * Art. 77.

Soit menée AC perpendiculaire ſur AM, & qui rencontre en C la droite MC perpendiculaire à la courbe; le point C ſera à la développée ACB.

Les angles AMT, ACM ſont égaux, puiſqu'étant joints l'un & l'autre au même angle AMC ils font un angle droit. La développée ACG ſera donc la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & elle n'en différera que par ſa poſition.

Si l'on ſuppoſe que le point C de la développée ACG étant donné, il faille déterminer la longueur CM de ſon rayon en ce point, qui * eſt égal à la portion AC qui fait une infinité de retours avant que de parvenir en A, il eſt clair qu'il n'y a qu'à mener AM perpendiculaire ſur AC. De ſorte que ſi l'on mene AT perpendiculaire ſur AM, la tangente MT ſera auſſi égale à la portion AM de la logarithmique ſpirale donnée AMD. * Art. 75.

Si l'on conçoit une infinité d'appliquées AM, Am, An, Ao, &c. qui faſſent entre elles des angles infiniment petits & égaux; il eſt clair que les triangles MAm, mAn, nAo, &c. ſeront ſemblables, puiſque les angles en A ſont égaux, & que par la propriété de la logarithmique, les angles en

m, n, o, &c. le ſont auſſi. Et partant $AM . Am :: Am . An$. Et $Am . An :: An . Ao$, & ainſi de ſuite. D'où l'on voit que les appliquées AM, Am, An, Ao, &c. ſont une progreſſion géométrique lorſqu'elles font entre elles des angles égaux.

EXEMPLE VII.

FIG. 82. 92. Soit la courbe AMD une des ſpirales à l'infini, formée dans le ſecteur BAD avec une propriété telle qu'ayant mené uu rayon quelconque AMP, & ayant nommé l'arc entier BPD, b; ſa partie BP, z; le rayon AB ou AP, a; & ſa partie AM, y; on ait cette proportion $b . z :: a^m . y^m$.

L'équation à la ſpirale AMD eſt $y^m = \frac{a^m z}{b}$, dont la différence donne $my^{m-1} dy = \frac{a^m dz}{b}$. Or à cauſe des ſecteurs ſemblables AMR, APp, l'on aura $AM(y) . AP(a) :: MR(dx) . Pp(dz) = \frac{adx}{y}$. Mettant donc cette valeur à la place de dz dans l'équation que l'on vient de trouver, on aura $my^m dy = \frac{a^{m+1} dx}{b}$ dont la différence (en prenant dx pour conſtante) eſt $mmy^{m-1} dy^2 + my^m ddy = 0$; d'où en diviſant par my^{m-1}, l'on tire $-yddy = mdy^2$; & partant

* *Art.* 77. ME * $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\, dy^2}$; ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée par le centre A la droite TAQ perpendiculaire ſur AM, & qui rencontre en T la tangente MT, & en Q la perpendiculaire MQ; ſoit fait $TA + \overline{m+1}\, AQ . TQ :: MA . ME$. Je dis que menant EC parallele à TQ, elle ira rencontrer MQ en un point C qui ſera à la développée.

Car à cauſe des paralleles MRG, TAQ, l'on aura $MR(dx) + \overline{m+1}\, RG\left(\frac{dy^2}{dx}\right) . MG\left(dx + \frac{dy^2}{dx}\right) :: TA +$

$\overline{m+1}\, AQ . TQ :: AM(y) . ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\, dy^2}$.

EXEMPLE VIII.

93. Soit *AMD* une demi-roulette simple, dont la base *BD* est égale à la demi-circonférence *BEA* du cercle générateur. Fig. 83.

Ayant nommé *AP*, x; *PM*, y; l'arc *AE*, u; & le diametre *AB*, $2a$; l'on aura par la propriété du cercle $PE = \sqrt{2ax - xx}$; & par celle de la roulette $y = u + \sqrt{2ax - xx}$, dont la différence donne $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ou $dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, en mettant pour du sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; en supposant dx constante, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$; & en mettant ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, il vient * $MC = 2\sqrt{4aa - 2ax}$, c'est-à-dire 2 *BE* ou 2 *MG*. * *Art.* 78.

Si l'on fait $x = o$, l'on aura $AN = 4a$ pour rayon de la développée dans le sommet *A*. Mais si l'on fait $x = 2a$, on trouvera que le rayon de la développée au point *D* devient nul ou zéro ; d'où l'on voit que la développée a son origine en *D*, & qu'elle se termine en *N* ensorte que $BN = BA$.

Pour savoir la nature de cette développée, il n'y a qu'à achever le rectangle *BS*, décrire le demi-cercle *DIS* qui a pour diametre *DS*, & mener *DI* parallele à *MC* ou à *BE*. Cela fait, il est clair que l'angle *BDI* est égal à l'angle *EBD*; & par conséquent que les arcs *DI*, *BE* sont égaux entre eux ; d'où il suit que leurs cordes *DI*, *BE* ou *GC* sont aussi égales. Si donc l'on fait *IC*, elle sera égale & parallele à *DG*, qui par la génération de la roulette est égale à l'arc *BE* ou *DI*; & partant la développée *DCN* est une demi-roulette qui a pour base la droite *NS* égale à la demi-circonférence *DIS* de son cercle générateur : c'est-à-dire

que c'eſt la demi-roulette même $AMDB$ poſée dans une ſituation renverſée.

COROLLAIRE.

* *Art.* 75. 94. Il eſt clair * que la portion de roulette DC eſt double de ſa tangente CG, ou de la corde correſpondante DI. Et la demi-roulette DCN double du diametre BN ou DS de ſon cercle générateur.

AUTRE SOLUTION.

95. On peut encore trouver la longueur du rayon MC ſans aucun calcul, en cette ſorte. Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de la premiere, une autre parallele me, une autre corde Be, & décrit des centres C, B les petits arcs GH, EF, on formera les triangles rectangles GHg, EFe qui ſeront égaux & ſemblables; car $Gg = Ee$, puiſque BG ou ME eſt égal à l'arc AE, & de même Bg ou Me eſt égal à l'arc Ae; de plus Hg ou $mg - MG = Fe$ ou $Be - BE$; GH ſera donc égal EF. Or les perpendiculaires MC, mC, étant paralleles aux cordes EB, eB, l'angle MCm ſera égal à l'angle EBe. Donc puiſque les arcs GH, EF, qui meſurent ces angles, ſont égaux, il s'enſuit que leurs rayons CG, BE ſeront auſſi égaux; & partant que MC doit être priſe double de MG ou de BE.

LEMME.

96. *S'il y a un nombre quelconque de quantités* a, b, c, d, e, *&c. ſoit que ce nombre ſoit fini ou infini, ſoit que ces quantités ſoient des lignes, ou des ſurfaces, ou des ſolides; la ſomme* $a - b + b - c + c - d + d - e$, *&c. de toutes leurs différences eſt égale à la plus grande* a, *moins la plus petite* e, *ou ſimplement à la plus grande lorſque la plus petite eſt zéro.* Ce qui eſt viſible.

COROLLAIRE I.

97. Les ſecteurs CMm, CGH étant ſemblables, il eſt clair

clair que Mm eſt double de GH ou de ſon égale EF; & comme cela arrive toujours en quelque endroit que l'on ſuppoſe le point M, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits arcs Mm, c'eſt-à-dire la portion Am de la demi-roulette AMD, eſt double de la ſomme de tous les petits arcs EF. Or le petit arc EF fait partie de la corde AE perpendiculaire ſur BE, & eſt la différence des cordes AE, Ae, parceque la petite droite eF perpendiculaire ſur Ae peut être conſidérée comme un petit arc décrit du centre A; & partant la ſomme de tous les petits arcs EF dans l'arc AZE ſera la ſomme des différences de toutes les cordes AE, Ae, &c. dans cet arc, c'eſt-à-dire par le Lemme qu'elle ſera égale à la corde AE. Il eſt donc évident que la portion AM de la demi-roulette AMD eſt double de la corde correſpondante AE.

COROLLAIRE II.

98. L'eſpace $MGgm$ * ou le trapeze $MGHm = \frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}GH \times MG = \frac{3}{2}EF \times BE$, c'eſt-à-dire qu'il eſt triple du triangle EBF ou EBe; d'où il ſuit que l'eſpace $MGBA$ ſomme de tous ces trapezes, eſt triple de l'eſpace circulaire $BEZA$ ſomme de tous ces triangles. * *Art.* 2.

COROLLAIRE III.

99. Nommant BP, z; l'arc AZE ou EM ou BG, u; & le rayon KA, a; l'on aura le parallelogramme $MGBE = uz$. Or l'eſpace de la roulette $MGBA = 3BEZA = 3EKB + \frac{3}{2}au$; & partant l'eſpace $AMEB$ renfermé par la portion de roulette AM, la parallele ME, la corde BE & le diametre AB, eſt $= 3EKB + \frac{3}{2}au - uz$. D'où il ſuit que ſi l'on prend $BP(z) = \frac{3}{2}a$, l'eſpace $AMEB$ ſera triple du triangle correſpondant EKB; & aura par conſéquent ſa quadrature indépendante de celle du cercle. Ce que

M. *Hugens* a remarqué le premier. Voici encore une autre ſorte d'eſpace qui a la même propriété.

Si l'on retranche de l'eſpace $AMEB$ le ſegment $BEZA$, il reſtera l'eſpace $AZEM = 2EKB + au - uz$; d'où l'on voit que ſi le point P tombe au centre K, l'eſpace $AZEM$ ſera égal au quarré du rayon. Il eſt évident qu'entre tous les eſpaces $AMEB$ & $AZEM$, il n'y a que les deux que l'on vient de déterminer qui aient leur quadrature abſolue indépendante de celle du cercle.

EXEMPLE IX.

FIG. 84. 100. Soit la demi-roulette AMD décrite par la révolution du demi-cercle AEB autour d'un autre cercle immobile BGD; & qu'il faille déterminer ſur la perpendiculaire MG donnée de poſition, le point où elle touche la développée.

Pour ſe ſervir des formules générales il faudroit prendre pour les appliquées de la courbe AMD, des lignes droites perpendiculaires ſur l'axe OA, & chercher enſuite une équation qui exprimât la relation des coupées aux appliquées, ou de leurs différences. Mais comme le calcul en ſeroit fort pénible, il vaut beaucoup mieux dans ces ſortes de rencontres en tenter la ſolution en ſe ſervant de la génération même. * *Art.* 2.

Lorſque le demi-cercle AEB eſt parvenu dans la poſition MGB dans laquelle il touche en G la baſe BD; & que le point décrivant A tombe ſur le point M de la demi-roulette AMD : il eſt clair,

1°. Que l'arc GM eſt égal à l'arc GD, comme auſſi l'arc GB du cercle mobile à l'arc GB du cercle immobile.

* *Art.* 43. 2°. Que MG eſt * perpendiculaire ſur la courbe; car conſidérant la demi-circonférence MGB ou AEB & la baſe BGD comme l'aſſemblage d'une infinité de petites droites égales chacune à ſa correſpondante, il eſt manifeſte que la demi-roulette AMD ſera l'aſſemblage d'une infinité de petits arcs qui auront pour centres ſucceſſivement tous les points touchans G, & qui ſeront décrits chacun par le même point M ou A.

3°. Que si l'on décrit du centre O du cercle immobile l'arc concentrique ME; les arcs MG, EB du cercle mobile seront égaux entre eux, aussi bien que leurs cordes MG, EB & les angles OGM, OBE. Car les droites OK, OK qui joignent les centres des deux cercles sont égales, puisqu'elles passent par les points touchans B, G; c'est pourquoi menant les rayons OM, OE & KE, on formera les triangles OKM, OKE égaux & semblables. L'angle OKM étant donc égal à l'angle OKE; les arcs MG, BE des demi-cercles égaux MGB, BEA, qui mesurent ces angles, seront égaux, comme aussi leurs cordes MG, EB d'où il suit que les angles OGM, OBE le seront aussi.

Cela posé, soit entendue une autre perpendiculaire mC infiniment proche de la premiere, un autre arc concentrique me, & une autre corde Be; soient décrits des centres C, B, les petits arcs GH, EF. Les triangles rectangles GHg, EFe seront égaux & semblables; car Gg ou $Dg - DG = Ee$ ou à l'arc Be — l'arc BE, de plus Hg ou $mg - MG = Fe$ ou à $Be - BE$. Le petit arc GH sera donc égal au petit arc EF; d'où il suit que l'angle GCH est à l'angle EBF, comme BE est à CG. Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver le rapport de ces angles. Ce qui se fait en cette sorte. Fig. 85.

Ayant mené les rayons OG, Og, KE, Ke, & nommé OG ou OB, b; KE ou KB ou KA, a; il est clair que l'angle $EBe = OBe - OBE = Ogm - OGM =$ (en menant GL, GV paralleles à Cm, Og) $LGM - OGV = GCH - GOg$. On aura donc l'angle $GCH = GOg + EBF$. Or les arcs Gg, Ee étant égaux, l'on aura aussi $GOg . EKe$ ou $2EBF :: KE (a) . OG (b)$; & partant l'angle $GOg = \frac{2a}{b} EBF$, & $GCH = \frac{2a+b}{b} EBF$. Donc $GCH . EBF$ ou $BE . CG :: \frac{2a+b}{b} . 1$; & partant l'inconnue $CG = \frac{b}{2a+b} BE$ ou MG. Ce qui donne cette construction.

Fig. 86. Soit fait $OA(2a+b).OB(b)::MG.GC$, le point C ſera à la développée.

Il eſt clair 1°. que eette développée commence au point D, & qu'elle y touche la baſe BGD; puiſque l'arc GM devient en ce point infiniment petit. 2°. Qu'elle ſe termine au point N, enſorte que $OA.OB::AB.BN::OA-AB$ ou $OB.OB-BN$ ou ON; c'eſt-à-dire que OA, OB, ON ſont continuellement proportionnelles. 3°. Si l'on décrit à préſent le cercle NSQ du centre O, je dis que la développée DCN eſt formée par la révolution du cercle mobile GCS, qui a pour diametre GS ou BN, autour de l'immobile NSQ; c'eſt-à-dire qu'elle eſt une demi-roulette ſemblable à la propoſée, ou de même eſpece (parceque les diametres AB, BN des cercles mobiles ont entre eux le même rapport que les rayons OB, ON des cercles immobiles), & poſée dans une ſituation renverſée enſorte que ſon ſommet eſt en D. Pour le prouver, ſuppoſons que les diametres des cercles mobiles ſe trouvent ſur la droite OT menée à diſcrétion du centre O; elle paſſera par les points touchans S, G; & faiſant AB ou $TG.BN$ ou $GS::MG.GC$; le point C ſera à la développée, & de plus à la circonfèrence du cercle GCS; car l'angle GMT étant droit, l'angle GCS le ſera auſſi. Or à cauſe des angles égaux MGT, CGS, l'arc TM ou GB eſt à l'arc CS, comme le diametre GT au diametre $GS::OG.OS::GB.NS$; & partant les arcs CS, SN ſont égaux. Donc, &c.

Corollaire I.

* Art. 75. 101. Il eſt clair * que la portion de roulette DC eſt égale à la droite CM; & partant que DC eſt à ſa tangente $CG::AB+BN.BN::OB+ON.ON$; c'eſt-à-dire comme la ſomme des diametres des deux cercles générateurs, ou des cercles mobile & immobile, eſt au rayon du cercle immobile. Cette vérité ſe découvre encore de la maniere qui ſuit. A cauſe des triangles ſemblables CMm, CGH, l'on aura $Mm.GH$ ou $EF::MC.GC::OA+OB(2a+2b).OB(b)$. D'où il ſuit (comme dans l'art. 97) que la portion de roulette

AM eſt à la corde correſpondante *AE*, comme la ſomme des diametres du cercle générateur & de la baſe, eſt au rayon de la baſe.

COROLLAIRE II.

102. Le trapeze $MGHm = \overline{\tfrac{1}{2}GH + \tfrac{1}{2}Mm} \times MG$. Fig. 85.
Or $CG\left(\frac{b}{2a+b}MG\right) . CM\left(\frac{2a+2b}{2a+b}MG\right) :: GH . Mm = \frac{2a+2b}{b} GH$. Donc puiſque $GH = EF$, & $MG = EB$, l'on aura $MGHm = \frac{2a+3b}{2b} EF \times EB$: c'eſt-à-dire que le trapeze $MGHm$ ſera toujours au triangle correſpondant $EBF :: 2a+3b . b$.

D'où il ſuit que l'eſpace *MGBA* renfermé par *MG*, *AB* perpendiculaires à la roulette, par l'arc *BG* & par la portion de roulette *MA*, eſt au ſegment de cercle correſpondant $BEZA :: 2a+3b . b$.

COROLLAIRE III.

103. Il eſt viſible que la quadrature indéfinie de la roulette dépend de la quadrature du cercle : mais ſi l'on prend *OQ* moyenne proportionnelle entre *OK*, *OA*, & qu'on décrive de ce rayon l'arc *QEM*; je dis que l'eſpace *ABEM* renfermé par le diametre *AB*, la corde *BE*, l'arc *EM*, & par la portion de roulette *AM*, eſt au triangle *EKB* $:: 2a+3b . b$. Car nommant l'arc *AE* ou *GB*, u; le rayon *OQ*, z; l'on aura $OB\,(b) . OQ\,(z) :: GB\,(u) . RQ$ ou $ME = \frac{uz}{b}$. Et partant l'eſpace *RGBQ* ou *MGBE*, c'eſt-à-dire $\overline{\tfrac{1}{2}GB + \tfrac{1}{2}RQ} \times BQ = \frac{zzu - bbu}{2b}$. Or * l'eſpace de la roulette $MGBA = \frac{2a+3b}{b} \times BEZA = \frac{2a+3b}{b} \times EKB + \frac{2a+3b}{b} \times KEZA\left(\frac{au}{2}\right)$. Si donc l'on retranche le précédent Fig. 87. * Art. 102.

espace de celui-ci, il restera $ABEM = \frac{2aau + 3abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+3b}{b} \times EKB = \frac{2a+3b}{b} EKB$, puisque par la construction $zz = 2aa + 3ab + bb$. D'où l'on voit que cet espace a sa quadrature indépendante de celle du cercle, & qu'il est le seul parmi tous ses semblables.

En voici encore un autre qui a la même proprieté. Si l'on retranche de l'espace $ABEM$ le segment $BEZA$ ($\frac{1}{2}au + EKB$), il restera l'espace $AZEM = \frac{2aau + 2abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+2b}{b} EKB = \frac{2a+2b}{b} EKB$ en faisant $zz = 2aa + 2ab + bb$: c'est-à-dire que si l'on divise la demi-circonférence en deux également au point E, l'espace $AZEM$ sera au double du triangle EKB, c'est-à-dire au quarré du rayon :: $OK(a+b) . OB(b)$.

COROLLAIRE IV.

Fig. 88. 104. Si le cercle mobile AEB roule au-dedans de l'immobile BGD, son diametre AB devient négatif de positif qu'il étoit auparavant; & partant il faut changer de signes les termes où il se rencontre avec une dimension impaire. D'où il suit, 1°. Que si l'on mene à discrétion la perpendiculaire MG à la roulette, & que l'on fasse OA
* Art. 100. $(b - 2a) . OB(b) :: MG . GC$, le point C sera * à la développée DCN décrite par la révolution du cercle qui a pour diametre BN, au-dedans de la circonférence NS concentrique à BD. 2°. Que si l'on décrit du centre O l'arc
* Art. 101. ME, la portion de roulette AM sera * à la corde AE ::
* Art. 102. $2b - 2a . b$. 3°. Que l'espace $MGBA$ est * au segment $BEZA = 3b - 2a . b$. 4°. Que si l'on prend $OQ = \sqrt{2aa - 3ab + bb}$, c'est-à dire moyenne proportionnelle entre OK, OA; l'espace $ABEM$ renfermé par la portion de roulette AM, l'arc ME, la corde EB, & le diametre
* Art. 103. AB, sera * au triangle $EKB :: 3b - 2a . b$. Mais que si

l'on fait OQ ou $OE = \sqrt{2aa - 2ab + bb}$, c'eſt-à-dire que l'arc AE ſoit le quart de la circonférence; l'eſpace $AZEM$ renfermé par la portion AM de roulette, & par les deux arcs ME, AE, ſera * au triangle EKB qui eſt en ce cas la moitié du quarré du rayon : : $2b - 2a . b$. * *Art.* 103.

COROLLAIRE V.

105. Si l'on conçoit que le rayon OB du cercle immobile devienne infini, l'arc BGD deviendra une ligne droite, & la courbe AMD deviendra la roulette ordinaire. Or comme dans ce cas le diametre AB du cercle mobile eſt nul par rapport à celui de l'immobile; il s'enſuit, 1°. Que $MG . GC :: b . b$. Puiſque $b \pm 2a = b$, c'eſt-à-dire que $MG = GC$; & partant que ſi l'on prend $BN = AB$, & qu'on mene la droite NS parallele à BD, la développée DCN ſera formée par la révolution du cercle, qui a pour diametre BN, ſur la baſe NS. 2°. Que la portion de roulette AM eſt à la corde correſpondante $AE :: 2b . b$. 3°. Que l'eſpace $MGBA$ eſt au ſegment $BEZA :: 3b . b$. 4°. Puiſque BQ ou $\pm OQ \mp OB$, que j'appelle x, eſt $= \mp b \pm \sqrt{2aa \pm 3ab + bb}$, d'où l'on tire (en ôtant les incommenſurables) $xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab$; l'on aura $x = \frac{3}{2}a$, en effaçant les termes où b ne ſe rencontre point, parcequ'ils ſont nuls par rapport aux autres. C'eſt-à-dire que ſi l'on prend dans la roulette ordinaire $Bp = \frac{3}{4} AB$, & qu'on mene la droite PEM parallele à la baſe BD; l'eſpace $AMEB$ ſera triple du triangle EKB. On trouvera en opérant de la même maniere, que ſi le point P tombe au centre K, l'eſpace $AZEM$ renfermé par la portion de roulette AM, la droite ME, & l'arc AE, ſera égal au quarré du rayon. Ce que l'on a déja démontré ci-devant art. 99.

FIG. 86, 88.

FIG. 85, 88.

FIG. 87, 88.

FIG. 83.

REMARQUE.

106. Comme les arcs DG, GM ſont toujours égaux FIG. 84.

entre eux, il s'ensuit que l'angle DOG est aussi toujours à l'angle $GKM :: GK . OG$. C'est pourquoi l'origine D de la roulette DMA, les rayons OG, GK des cercles générateurs, & le point touchant G étant donnés, si l'on veut déterminer dans cette position le point M qui décrit la roulette, il ne faut que tirer le rayon KM ensorte que l'angle GKM soit à l'angle donné $DOG :: OG . GK$. Or je dis maintenant que cela se peut toujours faire géométriquement lorsque le rapport de ces rayons se peut exprimer par nombres; & partant que la roulette DMA est alors géométrique.

Car supposant, par exemple, que $OG . GK :: 13 . 5$; il est clair que l'angle MKG doit contenir deux fois l'angle donné DOG & de plus $\frac{3}{5}$ de cet angle. Toute la difficulté se réduit donc à diviser l'angle DOG en cinq parties égales. Or c'est une chose connue parmi les Géometres, qu'on peut toujours diviser géométriquement un angle ou un arc donné en tant de parties égales qu'on voudra; puisqu'on arrive toujours à quelque équation qui ne renferme que des lignes droites. Donc, &c.

Je dis de plus que la roulette DMA est mécanique, ou, ce qui est la même chose, qu'on ne peut déterminer géométriquement ses points M lorsque la raison de OG à KG ne se peut exprimer par nombres, c'est-à-dire lorsqu'elle est sourde.

Car toute ligne, soit mécanique, soit géométrique, ou
Fig. 89. rentre en elle-même, ou s'étend à l'infini; puisqu'on peut toujours en continuer la génération. Si donc le cercle mobile ABC décrit par son point A dans sa premiere révolution la roulette ADE, cette roulette ne sera pas encore finie, & continuant toujours de rouler il décrira la seconde EFG, puis la troisieme GHI, & ainsi de suite jusqu'à ce que le point décrivant A retombe après plusieurs révolutions dans le même point d'où il étoit parti. Et pour lors si on recommence à rouler le cercle mobile ABC, il décrira derechef la même ligne courbe, de sorte que toutes ces roulet-

tes

tes prises ensemble ne composent qu'une seule courbe *ADEFGHI*, &c. Or les rayons des cercles générateurs étant incommensurables, leurs circonférences le seront aussi; & par conséquent le point décrivant *A* du cercle mobile *ABC* ne pourra jamais retomber dans le point *A* de l'immobile, d'où il étoit parti, si grand que puisse être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependant qu'une même ligne courbe *ADEFGHI*, &c. Maintenant si l'on mene au travers du cercle immobile une ligne droite indéfinie, il est clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinité de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne géométrique doit avoir au moins autant de dimensions que cette ligne peut être coupée en de différents points par une droite; il s'ensuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimensions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou transcendante.

PROPOSITION III.

Problême.

107. *La ligne courbe* BFC *étant donnée, trouver une infinité de lignes* AM, BN, EFO, *dont elle soit la développée commune.* Fig. 90.

Si l'on développe la courbe *BFC* en commençant par le point *A*, il est clair que tous les points *A*, *B*, *F* du fil *ABFC* décriront dans ce mouvement des lignes courbes *AM*, *BN*, *FO* qui auront toutes pour développée commune la courbe donnée *BFC*. Mais il faut observer que la ligne *FO* n'ayant pour développée que la partie *FC*, son origine n'est pas en *F*; & que pour la trouver, il faut développer la partie restante *BF* en commençant au point *F* pour décrire la portion *EF* de la courbe *EFO* dont l'origine est en *E*, & qui a pour développée la courbe entiere *BFC*.

Si l'on veut trouver les points *M*, *N*, *O* ſans ſe ſervir du fil *ABFC*, il n'y a qu'à prendre ſur une tangente quelconque *CM* autre que *BA*, les parties *CM*, *CN*, *CO* égales à *ABFC*, *BFC*, *FC*.

COROLLAIRE.

108. Il eſt évident, 1°. Que les courbes *AM*, *BN*, *EFO* ſont d'une nature très différente entre elles ; puiſque la courbe *AM* a dans ſon ſommet *A* le rayon de ſa développée égal à *AB*, au lieu que celui de la courbe *BN* eſt nul. Il eſt viſible auſſi par la figure même de la courbe *EFO* qu'elle eſt très différente des courbes *AM*, *BN*.

2°. Que les courbes *AM*, *BN*, *EFO* ne ſont géométriques que lorſque la donnée *BFC* eſt géométrique & de plus rectifiable. Car ſi elle n'eſt pas géométrique, en prenant *BK*, pour la coupée, on ne trouvera point géométriquement l'appliquée *KC* : & ſi elle n'eſt pas rectifiable, ayant mené la tangente *CM*, on ne pourra déterminer géométriquement les points *M*, *N*, *O* des courbes *AM*, *BN*, *EFO* ; puiſqu'on ne peut trouver géométriquement des lignes droites égales à la ligne courbe *BFC*, & à ſes portions *BF*, *FC*.

REMARQUE.

Fig. 91. 109. Si l'on développe une ligne courbe *BAC* qui ait un point d'inflexion en *A*, en commençant par le point *D* autre que le point d'inflexion ; on formera par le développement de la partie *BAD* la partie *DEF* ; & par celui de la partie *DC*, la partie reſtante *DG* : de ſorte que *FEDG* ſera la courbe entiere formée par le développement de *BAC*. Or il eſt viſible que cette courbe rebrouſſe chemin aux points *D* & *E*, avec cette différence qu'au point de rebrouſſement *D* les parties *DE*, *DG* ont leur convexité oppoſée l'une à l'autre ; au lieu qu'au point *E* les parties *DE*, *EF* ſont concaves vers le même côté. On a enſeigné dans la ſection précédente à trouver les points de rebrouſſement tels que *D* : il eſt queſtion maintenant de déterminer les points *E*,

qu'on peut appeller points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte, & que perſonne, que je ſache, n'a encore conſidéré.

Pour en venir à bout, on menera à diſcrétion ſur la partie DE deux perpendiculaires MN, mn, terminées par la développée aux points N, n, par leſquels on tirera deux autres perpendiculaires NH, nH ſur les premieres NM, nm; ce qui formera deux petits ſecteurs MNm, NHn qui ſeront ſemblables, puiſque les angles MNm, NHn ſont égaux. On aura donc $Nn . Mm :: NH . NM$. Or dans le point d'inflexion A le rayon NH devient * infini ou zéro; & le rayon MN, qui devient AE, demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebrouſſement E de la ſeconde ſorte, la raiſon de la différence Nn du rayon MN de la développée, à la différence Mm de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant puiſque * $Nn = \frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$, & $Mm = \sqrt{dx^2+dy^2}$, l'on aura $\frac{dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2}{dxddy^2} = 0$ ou ∞; & multipliant par $dxddy^2$, on trouvera la formule $dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2 = 0$ ou ∞, qui ſervira à déterminer les points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte.

* *Art.* 81.

* *Art.* 86.

On peut encore concevoir qu'une rebrouſſante DEF ou $HDEFG$ de la ſeconde ſorte, ait pour développée une autre rebrouſſante BAC de la ſeconde ſorte, telle que ſon point de rebrouſſement A réponde au point de rebrouſſement E, c'eſt-à-dire qu'il ſoit ſitué ſur le rayon de la développée qui part du point E. Or il eſt clair, dans cette ſuppoſition, que le rayon EA de la développée ſera toujours un *plus petit* ou un *plus grand*; & partant que la différence de $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ expreſſion générale * des rayons de la développée, doit être nulle ou infinie au point cherché E; ce qui donne la même formule qu'auparavant: de ſorte qu'elle eſt générale pour trouver les points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte.

FIG. 92. 93.

* *Art.* 78.

NOTE VI.

Fig. 5, pl. A. Une courbe continue quelconque algébrique ou transcendante décrite sur un plan étant proposée : si l'on nomme l'abcisse AP, x, l'ordonnée PH, y, le rayon vecteur AH, t, la normale HR, f, la perpendiculaire AO sur la tangente, h, le rayon de courbure HD, k, le périmetre AH, u, l'angle ATH de la ligne des abcisses avec la tangente, m, l'angle AHT de la tangente avec le rayon vecteur, n, l'angle HAP du rayon vecteur avec la ligne des abcisses, z ; on aura, en prenant le rayon des tables pour l'unité,

$tang.\ m = \frac{dy}{dx}$, $du^2 = dx^2 + dy^2$, $t^2 = x^2 + y^2$, $f = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$,

$k = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{\pm dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ (le signe $-$ étant pour la courbe concave, & le signe $+$ pour la courbe convexe). Ces formules ont été démontrées dans les articles précédents. Maintenant le triangle AOT, rectangle en O, donne $1 : AT\left(\frac{ydx}{dy} - x\right) :: sin.\, m\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) : h = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$;

$1 : \frac{ydx}{dy} - x :: cos.\, m\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right) : TO = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{ydx - xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Dans le triangle HOA rectangle en O, si l'on prend HO pour le rayon des tables, OA sera la tangente de l'angle n. Mais $HO = HT$ $\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right) - TO = \frac{ydy + xdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; donc $tang.\ n = \frac{ydx - xdy}{ydy + xdx}$. Enfin, dans le triangle rectangle APH, si l'on prend AP pour le rayon des tables, on aura $x : y :: 1 : tang.\ z = \frac{y}{x}$.

Toutes ces équations sont entre trois co-ordonnées ; en combinant trois à trois les dix co-ordonnées que nous avons choisies, on en tireroit cent vingt qui exprimeroient autant de propriétés communes à toutes les courbes. On demande, par exemple, la relation entre k, t & m ? A cause de $d\ tang.\ m = \frac{dm}{cos.\, m^2}$ & de $cos.\ m = \frac{dx}{du}$, on a $d\frac{dy}{dx} = \frac{dm\, du^2}{dx^2}$,

& $k = \mp \frac{du}{dm}$. De plus, à cauſe de $\mathit{ſin.}\, m = \frac{dy}{du}$, $tdt\ (= xdx + ydy)$ $= \mp k\,dm\,(\mathit{coſ.}\, m \sqrt{t^2 - y^2} + y\,\mathit{ſin.}\, m)$; d'où il ſera facile de tirer $y = \mp \frac{tdt}{kdm}\,\mathit{ſin.}\, m \pm \mathit{coſ.}\, m \frac{t\sqrt{k^2dm^2 - dt^2}}{kdm}$. Après avoir différentié cette équation, on y mettra pour dy ſa valeur $\mp k\,dm\,\mathit{ſin.}\, m$, & on aura (*a*) .... $(kdm - d\frac{tdt}{kdm} - \frac{t}{k}\sqrt{k^2dm^2 - dt^2})\,\mathit{ſin.}\, m$ $= \left(\frac{tdt}{k} - d\frac{t\sqrt{k^2dm^2 - dt^2}}{kdm}\right)\mathit{coſ.}\, m$; formule très compliquée.

Mais, à cauſe de $d\,\mathit{tang.}\, z \left(= \frac{dz}{\mathit{coſ.}\, z^2}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$, $dz = \frac{xdy - ydx}{t^2} = \frac{dt}{t}\,\mathit{tang.}\, n$. De plus h étant égal à $t\,\mathit{ſin.}\, n$, on a $dh\ (= dt\,\mathit{ſin.}\, n + tdn\,\mathit{coſ.}\, n) = (dt\,\mathit{tang.}\, n + tdn)\ \mathit{coſ.}\, n =$ $(dz + dn)\,t\,\mathit{coſ.}\, n = tdm\,\mathit{coſ.}\, n$; &, à cauſe de $\mathit{coſ.}\, n = \frac{\sqrt{t^2 - h^2}}{t}$, $dh = dm\sqrt{t^2 - h^2}$. On a auſſi $HO \left(= \frac{dt}{du}\right) = \sqrt{t^2 - h^2}$; d'où il eſt facile de tirer $h = \frac{t\sqrt{du^2 - dt^2}}{du}$; & par conſéquent $du - hdm$ $= \frac{tdt - hdh}{\sqrt{t^2 - h^2}} = d\sqrt{t^2 - h^2} = d\frac{dh}{dm}$. Donc

(*b*) ..... $kdm - \frac{t\sqrt{k^2dm^2 - dt^2}}{k} - d\frac{tdt}{kdm} = 0$.

En comparant cette derniere équation à l'équation (*a*), on en tirera

(*c*) ..... $\frac{tdt}{k} - d\frac{t\sqrt{k^2dm^2 - dt^2}}{kdm} = 0$,

que nous démontrerons directement de la maniere ſuivante.

Des deux équations $hdu = t\sqrt{du^2 - dt^2}$, $kdh = \mp tdt$, on tire $\mp \frac{tdt}{k} = d\frac{t\sqrt{du^2 - dt^2}}{du}$, où l'on mettra pour du ſa valeur $\mp kdm$, & on aura $\frac{tdt}{k} - d\frac{t\sqrt{k^2dm^2 - dt^2}}{kdm} = 0$. D'ailleurs on

s'assurera bien aisément que les équations (b) & (c) sont identiquement la même chose. En effet on tirera de la seconde $\int \frac{tdt}{k} = \frac{t\sqrt{k^2 dm^2 - dt^2}}{kdm}$, & par conséquent $kdm = \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - \left(\int \frac{tdt}{k}\right)^2}}$. En substituant cette valeur de kdm dans la premiere, elle deviendra $\frac{tdt - \frac{tdt}{k}\int \frac{tdt}{k}}{\sqrt{t^2 - \left(\int \frac{tdt}{k}\right)^2}} = d\sqrt{t^2 - \left(\int \frac{tdt}{k}\right)^2}$, qui est évidemment identique.

On doit conclure des calculs précédents qu'il n'est pas toujours facile de trouver entre trois co-ordonnées l'équation la plus simple ; puisque le plus souvent on n'y peut parvenir qu'en combinant entre elles un très grand nombre d'autres relations en apparence fort étrangeres à celle que l'on cherche. On a donc fait une chose utile dans l'ouvrage qui a pour titre, *Traité des propriétés communes à toutes les courbes*, en calculant les cent vingt formules relatives aux dix co-ordonnées que nous avons définies au commencement de cet article. Il est à croire qu'elles n'y sont pas toutes sous la forme la plus simple; & qu'en combinant de nouvelles co-ordonnées avec celles qu'on y a choisies, il seroit peut-être possible d'en simplifier plusieurs. Nous n'en regardons pas moins le Traité dont il s'agit comme un très bon supplément à l'Ouvrage de M. le Marquis de l'Hôpital, & nous y renvoyons avec d'autant plus de plaisir, que nous savons qu'il est de bonne main. L'Auteur est avantageusement connu des Géometres par plusieurs Ouvrages, & sur-tout par la part qu'il eut au Traité des courbes algébriques, un des meilleurs en ce genre. Celui que nous annonçons se vend chez Didot l'aîné, rue Pavée Saint-André-des-Arcs.



SECTION VI.

Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réflexion.

DÉFINITION.

Si l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, qui partent d'un point lumineux B, se réfléchissent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, ensorte que les angles de réflexion soient égaux aux angles d'incidence; la ligne HFN, que touchent les rayons réfléchis ou leurs prolongements AH, MF, DN, est appellée *Caustique par réflexion*. FIG. 94, 95.

COROLLAIRE I.

110. Si l'on prolonge HA en I, de sorte que $AI = AB$, & que l'on développe la caustique HFN en commençant au point I; on décrira la courbe ILK telle que la tangente FL sera * continuellement égale à la portion FH de la caustique plus à la droite HI. Et si l'on conçoit deux rayons incident & réfléchi Bm, mF infiniment près de BM, MF, & qu'ayant prolongé Fm en l, on décrive des centres F, B les petits arcs MO, MR : on formera les petits triangles rectangles MOm, MRm, qui seront semblables & égaux; car puisque l'angle $OmM = FmD = RmM$, & que de plus l'hypothénuse Mm est commune, les petits côtés Om, Rm seront égaux entre eux. Or puisque Om est la différence de LM, & Rm celle de BM, & que cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point M; il s'ensuit que $ML - IA$ ou $AH + HF - MF$ somme * de toutes les différences Om dans la portion de courbe AM, est $=$ $BM - BA$ somme * de toutes les différences Rm dans la même portion AM. Donc la portion HF de la caustique HFN sera égale à $BM - BA + MF - AH$.

FIG. 94. * Art. 75. * Art. 96. * Art. 96.

Il peut arriver différents cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM, & que le réfléchi AH développe ou enveloppe la portion HF pour parvenir en MF: mais l'on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidents est égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe avant que

FIG. 95. de tomber sur l'autre. Par exemple, $BM - BA = MF + FH - AH$; d'où l'on tire $FH = BM - BA + AH - MF$.

FIG. 94, 95. Si l'on décrit du centre B l'arc de cercle AP; il est clair que PM sera la différence des rayons incidents BM, BA. Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidents BA,

FIG. 96. BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

COROLLAIRE II.

FIG. 94. 111. Si l'on conçoit que la figure $BAMD$ soit renversée sur le même plan, ensorte que le point B tombe sur le point I, & qu'ainsi la tangente en A de la courbe AMD, dans sa premiere situation, la touche encore dans cette nouvelle; & qu'on fasse rouler la courbe aMd sur AMD, c'est-à-dire sur elle-même, ensorte que les portions aM, AM soient toujours égales: je dis que le point B décrira dans ce mouvement une espece de roulette ILK qui aura pour développée la caustique HFN.

Car il suit de la génération, 1°. Que la ligne LM tirée

* *Art.* 43. du point décrivant L au point touchant M sera * perpendiculaire à la courbe ILK. 2°. Que La ou $IA = BA$, & $LM = BM$. 3°. Que les angles faits par les droites ML, BM sur la tangente commune en M sont égaux; & partant que si l'on prolonge LM en F, le rayon MF sera le réfléchi de l'incident BM. D'où l'on voit que la perpendiculaire LF touche la caustique HFN: & comme cela arrive toujours, en quelqu'endroit qu'on prenne le point L, il s'ensuit

s'ensuit que la courbe ILK est formée par le développement de la caustique HFN, plus la droite HI.

Il suit de ceci que la portion FH ou $FL - HI = BM + MF - BA - AH$. Ce que l'on vient de démontrer d'une autre maniere dans le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

112. Si la tangente DN devient infiniment proche de la tangente FM; il est clair que le point touchant N, & celui d'intersection V se confondront avec l'autre point touchant F: de sorte que pour trouver le point F où le rayon réfléchi MF touche la caustique HFN, il ne faut que chercher le point de concours des rayons réfléchis infiniment proches MF, mF. Et en effet, si l'on imagine une infinité de rayons d'incidence infiniment proches les uns des autres, on verra naître par les intersections des réfléchis un polygone d'une infinité de côtés, dont l'assemblage composera la caustique HFN.

PROPOSITION I.

Problême général.

113. *La nature de la courbe* AMD, *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver sur le réfléchi* MF *donné de position, le point* F *où il touche la caustique.* FIG. 97.

Ayant trouvé, par la section précédente, la longueur MC du rayon de la développée au point M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg sur les rayons incidents & réfléchis; ensuite on nommera les données BM, y; ME ou MG, a.

Cela posé, on prouvera, comme dans le Corollaire premier*, que les triangles MRm, MOm sont semblables & égaux, & qu'ainsi $MR = MO$. Or à cause de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion, l'on a aussi $CE = CG$, $Ce = Cg$; & partant $CE - Ce$ ou $EQ = CG - Cg$ ou * *Art.* 110.

SG. Donc à cauſe des triangles ſemblables BMR & BEQ, FMO & FGS, l'on aura $BM + BE\ (2y - a) . BM\ (y) : : MR + EQ$ ou $MO + GS . MR$ ou $MO : : MG\ (a) . MF = \frac{ay}{2y - a}$.

Si le point lumineux B tomboit de l'autre côté du point E par rapport au point M, ou (ce qui eſt la même choſe) ſi la courbe AMD étoit convexe vers le point lumineux B; y deviendroit négative de poſitive qu'elle étoit, & l'on auroit par conſéquent $MF = \frac{-ay}{-2y - a}$ ou $\frac{ay}{2y + a}$.

Fig. 96. Si l'on ſuppoſe que y devienne infinie, c'eſt-à-dire que le point B ſoit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidents ſeront paralleles entre eux, & l'on aura $MF = \frac{1}{2} a$, parceque a eſt nulle par rapport à $2y$.

Corollaire I.

Fig. 94. 95. 114. Comme l'on ne trouve pour MF qu'une ſeule valeur dans laquelle entre le rayon de la développée; il s'enſuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une ſeule cauſtique HFN par réflexion, puiſqu'elle * n'a qu'une ſeule développée.

* *Art.* 80.

Corollaire II.

* *Art.* 85. 115. Lorſque AMD eſt géométrique, il eſt clair * que ſa développée l'eſt auſſi, c'eſt-à-dire que l'on trouve géométriquement tous les points C. D'où il ſuit que tous les points F de ſa cauſtique ſeront auſſi déterminés géométriquement, c'eſt-à-dire que la cauſtique HFN ſera géométrique. Mais je dis de plus, que cette cauſtique ſera toujours rectifiable; puiſqu'il eſt évident * que l'on peut trouver avec le ſecours de la courbe AMD, qu'on ſuppoſe géométrique, des lignes droites égales à une de ſes portions quelconques.

Fig. 97.

Fig. 94. 95.

* *Art.* 110.

COROLLAIRE. III.

116. Si la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B ; la valeur de MF $\left(\frac{ay}{2y+a}\right)$ ſera toujours poſitive ; & il faudra prendre par conſéquent le point F du côté du point C, par rapport au point M. comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul. D'où l'on voit que les rayons réfléchis infiniment proches ſeront divergents. FIG. 97.

Mais ſi la courbe AMD eſt concave vers le point lumineux B, la valeur de MF $\left(\frac{ay}{2y-a}\right)$ ſera poſitive lorſque y ſurpaſſe $\frac{1}{2}a$, négative lorſqu'il eſt moindre, & infinie lorſqu'il eſt égal. D'où il ſuit que ſi l'on décrit un cercle qui ait pour diametre la moitié du rayon MC de la développée, les rayons réfléchis infiniment proches ſeront convergents lorſque le point lumineux B tombe au-dehors de ſa circonférence, divergents lorſqu'il tombe au-dedans, & enfin paralleles lorſqu'il tombe deſſus.

COROLLAIRE IV.

117. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura ME $(a) = o$; & partant $MF = o$. Or comme le rayon réfléchi eſt alors dans la direction de l'incident, & que la nature de la cauſtique conſiſte à toucher tous les rayons réfléchis; il s'enſuit qu'elle touchera auſſi le rayon incident BM au point M; c'eſt-à-dire que la cauſtique & la donnée auront la même tangente dans le point M qui leur ſera commun.

Si le rayon MC de la développée eſt nul, on aura encore ME $(a) = o$; & partant $MF = o$. D'où l'on voit que la donnée & la cauſtique font entre elles dans le point M qui leur eſt commun, un angle égal à l'angle d'incidence.

Si le rayon CM de la développée eſt infini, le petit arc Mm deviendra une ligne droite, & l'on aura $MF = \mp y$; puiſque ME (a) étant infinie, y ſera nul par rapport à a. Or

comme cette valeur eſt négative lorſque le point B tombe du côté du point C par rapport à la ligne AMD, & poſitive lorſqu'il tombe du côté oppoſé; il s'enſuit que les rayons réfléchis infiniment proches ſeront toujours divergents lorſque la ligne AMD eſt droite.

COROLLAIRE V.

118. Il eſt évident que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on trouvera facilement le troiſieme.

FIG. 98. Soit 1°. la courbe AMD une parabole qui ait pour foyer le point lumineux B. Il eſt clair, par les éléments des ſections coniques, que tous les rayons réfléchis ſeront paralleles à l'axe; & partant que MF ſera toujours infinie en quelque endroit que l'on ſuppoſe le point M. On aura donc $a = 2y$: d'où il ſuit que ſi l'on prend ME double de MB, & qu'on mene la perpendiculaire EC; elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe AMD, en un point C qui ſera à la développée de cette courbe.

FIG. 99. Soit 2°. la courbe AMD une ellipſe qui ait pour un de ſes foyers le point lumineux B. Il eſt encore clair que tous les rayons réfléchis MF ſe rencontreront dans un même point

* *Art.* 113. F qui ſera l'autre foyer. Et ſi l'on nomme MF, z; l'on aura*

FIG. 100. $z = \frac{ay}{2y - a}$; d'où l'on tire la cherchée $ME(a) = \frac{2yz}{y + z}$. Mais ſi la courbe AMD eſt une hyperbole, le foyer F tombera de l'autre côté; & partant $MF(z)$ deviendra négative: d'où il ſuit qu'on aura alors $ME(a) = \frac{-2yz}{y - z}$ ou $\frac{2yz}{z - y}$. Ce qui donne cette conſtruction qui ſert auſſi pour l'ellipſe.

FIG. 99. 100. Soit priſe ME quatrieme proportionnelle au demi-axe traverſant, & aux rayons incident & réfléchi; ſoit menée la perpendiculaire EC: elle ira couper la ligne MC perpendiculaire à la ſection, en un point C qui ſera à la développée.

EXEMPLE I.

FIG. 101. 119. Soit la courbe AMD une parabole, dont les rayons

incidents PM ſoient perpendiculaires ſur ſon axe AP. Il faut trouver ſur les réfléchis MF les points F où ils touchent la cauſtique AFK.

Il eſt clair que ſi l'on mene le rayon MC de la développée, & qu'on tire la perpendiculaire CG ſur le rayon réfléchi MF, il faudra * prendre MF égale à la moitié de MG. Mais cette conſtruction ſe peut abréger, en conſidérant que ſi l'on mene MN parallele à l'axe AP, & la droite ML au foyer L; les angles LMP, FMN ſeront égaux, puiſque par la propriété de la parabole $LMQ = QMN$, & par la ſuppoſition $PMQ = QMF$. Si donc l'on ajoute de part & d'autre le même angle PMF, l'angle LMF ſera égal à l'angle PMN, c'eſt-à-dire droit. Or l'on vient de démontrer * que LH, perpendiculaire ſur ML, rencontre le rayon MC de la développée en ſon milieu H. Si donc l'on mene MF parallele & égale à LH, elle ſera un des rayons réfléchis, & touchera en F la cauſtique AFK. Ce qu'il falloit trouver.

* *Art.* 113.

* *Art.* 118. *num.* 1.

Si l'on ſuppoſe que le rayon réfléchi MF ſoit parallele à l'axe AP; il eſt évident que le point F de la cauſtique ſera le plus éloigné qu'il eſt poſſible de l'axe AP, puiſque la tangente en ce point ſera parallele à l'axe. Afin donc de déterminer ce point dans toutes les cauſtiques, telles que AFK, formées par des rayons incidens perpendiculaires à l'axe de la courbe donnée, il n'y a qu'à conſidérer que MP doit être alors égale à PQ. Ce qui donne $dy = dx$. Soit $ax = yy$, on aura $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} = dx$, d'où l'on tire $AP(x) = \frac{1}{4}a$: c'eſt-à-dire que ſi le point P tombe au foyer L, le rayon réfléchi MF ſera parallele à l'axe. Ce qui eſt d'ailleurs viſible; puiſque dans ce cas MP ſe confondant avec LM, il faut auſſi que MF ſe confonde avec MN, & LH avec LQ. D'où l'on voit que MF eſt alors égale à ML; & partant que ſi l'on mene FR perpendiculaire ſur l'axe, on aura AR ou $AL + MF = \frac{3}{4}a$. On voit auſſi que la portion AF de la cauſtique eſt égale en ce cas au parametre, puiſqu'elle eſt toujours * égale à $PM + MF$.

* *Art.* 110.

Pour déterminer le point K où la cauſtique AFK rencontre l'axe AP, il faut chercher la valeur de MO, & l'égaler à celle de MF; car il eſt viſible que le point F tombant en K, les lignes MF, MO deviennent égales entre elles. Nommant donc l'inconnue MO, t; l'angle PMO coupé en deux également par MQ perpendiculaire à la courbe, donnera $MP(y).MO(t)::PQ\left(\frac{ydy}{dx}\right).OQ = \frac{tdy}{dx}$. Et partant $OP = \frac{tdy+ydy}{dx} = \sqrt{tt-yy}$, à cauſe du triangle rectangle MPO; & diviſant de part & d'autre par $t+y$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t-y}{t+y}}$, d'où l'on tire $MO\,(t) =$
* *Art.* 77. $\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2} = MF\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{dx^2+dy^2}{-2ddy}$, puiſque * $ME\,(a)$ $= \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$. Ce qui donne $dy^2 - 2yddy = dx^2$, qui ſervira à trouver le point P tel que menant le rayon incident PM & le réfléchi MF, ce dernier touche la cauſtique AFK au point K où elle rencontre l'axe AP.

On a dans la parabole $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $ddy = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2$; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $\frac{1}{4}x^{-1}dx^2 + \frac{1}{2}x^{-1}dx^2 = dx^2$; d'où l'on tire $AP\,(x) = \frac{3}{4}$ du parametre.

Pour trouver la nature de la cauſtique AFK à la maniere de *Deſcartes*, il faut chercher une équation qui exprime la relation de la coupée $AR\,(u)$, à l'appliquée $RF(z)$; ce qui ſe fait en cette ſorte. Puiſque $MO\,(t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}$, l'on aura $PO\left(\frac{tdy+ydy}{dx}\right) = \frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2}$; & à cauſe des triangles ſemblables MPO, MSF, on formera ces proportions

$MO\left(\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}\right).MF\left(\frac{dx^2+dy^2}{-2ddy}\right)$ ou $-2yddy.dx^2-dy^2::MP(y).MS(y-z)=\frac{dx^2-dy^2}{-2ddy}::PO\left(\frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2}\right).SF$ ou $PR(u-x)=\frac{dxdy}{-ddy}$. On aura donc ces deux équations $z=y+\frac{dy^2-dx^2}{-2ddy}$, & $u=x+\frac{dxdy}{-ddy}$, qui serviront, avec celles de la courbe donnée, à en former une nouvelle où x & y ne se trouveront plus, & qui exprimera par conséquent la relation de $AR(u)$ à $FR(z)$.

Lorsque la courbe *AMD* est une parabole, comme l'on a supposé dans cet exemple, on trouvera $z=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}$, ou (en quarrant chaque membre) $\frac{9}{4}x-6xx+4x^3=zz$, & $u=3x$; d'où l'on tire l'équation cherchée $azz=\frac{4}{27}u^3-\frac{2}{3}auu+\frac{3}{4}aau$ qui exprime la nature de la caustique *AFK*. On peut remarquer que *PR* est toujours double de *AP*, puisque $AR(u)=3x$; ce qui fournit encore une nouvelle maniere de déterminer sur le rayon réfléchi *MF* le point cherché *F*.

EXEMPLE II.

120. Soit la courbe *AMD* un demi-cercle qui ait pour diametre la ligne *AD*, & pour centre le point *C*; soient les rayons incidents *PM* perpendiculaires sur *AD*. FIG. 102.

Comme la développée du cercle se réunit en un seul point qui en est le centre, il s'ensuit * que si l'on coupe le rayon *CM* en deux également au point *H*, & qu'on mene *HF* perpendiculaire sur le rayon réfléchi *MF*, il coupera ce rayon en un point *F*, où il touche la caustique *AFK*. Il est clair que le rayon réfléchi *MF* est égal à la moitié de l'incident *PM*; d'où il suit, 1°. Que le point *P* tombant en *C*, le point *F* tombe en *K* milieu de *CB*. 2°. Que la por- * *Art.* 113.

tion AF eſt triple de MF, & la cauſtique AFK triple de BK. On voit auſſi que ſi l'on fait l'angle ACM demi-droit, le rayon réfléchi MF ſera parallele à AC; & partant que le point F ſera plus élevé au-deſſus du diametre AD, que tout autre point de la cauſtique.

Le cercle qui a pour diametre MH, paſſe par le point F; puiſque l'angle HFM eſt droit. Et ſi l'on décrit du centre C & du rayon CK ou CH, moitié de CM, le cercle KHG; l'arc HF ſera égal à l'arc HK; car l'angle CMF étant égal à CMP ou HCK les arcs $\frac{1}{2}HF$, HK, qui meſurent ces angles dans les cercles MFH, KHG, ſeront entre eux comme les rayons $\frac{1}{2}MH$, HC de ces cercles. D'où l'on voit que la Cauſtique AFK eſt une roulette formée par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine eſt en K, & le ſommet en A.

EXEMPLE III.

FIG. 103. 121. Soit la courbe AMD un cercle qui ait pour diametre la ligne AD, & pour centre le point C; ſoit le point lumineux A, d'où partent tous les rayons incidents AM, l'une des extrémités de ce diametre.

Si l'on mene du centre C ſur le rayon incident AM la perpendiculaire CE : il eſt clair, par la propriété du cercle, que le point E coupe en deux parties égales la corde AM; & qu'ainſi $ME\ (a) = \frac{1}{2}y$. On aura donc $MF\ \left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{3}y$: c'eſt-à-dire qu'il faut prendre le rayon réfléchi MF égal au tiers de l'incident AM. D'où l'on voit que $DK = \frac{1}{3}AD$, $CK = \frac{1}{3}CD$, & que * la cauſtique $AFK = \frac{4}{3}AD$, de même que ſa portion $AF = \frac{4}{3}AM$. Si l'on prend $AM = AC$, le rayon réfléchi MF ſera parallele au diametre AD;

* Art. 110.

AD; & par conséquent le point F sera le plus élevé qu'il soit possible au-dessus de ce diametre.

Si l'on prend $CH = \frac{1}{3} CM$, & qu'on tire HF perpendiculaire sur MF; le point F sera à la caustique : car menant HL perpendiculaire sur AM, il est clair que $ML = \frac{2}{3} ME = \frac{1}{3} AM$, puisque $MH = \frac{2}{3} CM$. Le cercle qui a pour diametre MH, passera donc par le point F de la caustique; & si l'on décrit un autre cercle KHG du centre C, & du rayon CK ou CH, il lui sera égal, & l'arc HK sera égal à l'arc HF: car dans le triangle isoscele CMA l'angle externe $KCH = 2CMA = AMF$; & partant les arcs HK, HF, mesures de ces angles dans des cercles égaux, seront aussi égaux. D'où il suit que la caustique AFK est encore une roulette décrite par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine est en K, & le sommet en A.

On pourroit encore prouver ceci de cette autre maniere. Si l'on décrit une roulette par la révolution d'un cercle égal au cercle AMD autour de celui-ci, en commençant au point A; l'on a démontré dans le Corollaire second * qu'elle aura pour développée la caustique AFK. Or * cette développée est une roulette de même espece, c'est-à-dire que les diametres des cercles générateurs en seront égaux; & on déterminera le point K en prenant CK troisieme proportionnelle à $CD + DA$ & à CD, c'est-à-dire égale à $\frac{1}{3} CD$. Donc, &c.

* *Art.* 111.
* *Art.* 100.

EXEMPLE IV.

122. Soit la courbe AMD une demi-roulette ordinaire décrite par la révolution du demi-cercle NGM sur la droite BD, dont le sommet est en A, & l'origine en D; soient les rayons incidents KM paralleles à l'axe AB. FIG. 104.

Puisque * MG est égale à la moitié du rayon de la développée, il s'ensuit * que si l'on mene GF perpendiculaire sur le rayon réfléchi MF, le point F sera à la caustique DFB.

* *Art.* 95.
* *Art.* 113.

D'où l'on voit que MF doit être prise égale à KM.

Si l'on mene du centre H du cercle générateur MGN au point touchant G, & au point décrivant M, les rayons HG, HM; il est clair que HG sera perpendiculaire sur BD, & que l'angle $GMH = MGH = GMK$: d'où l'on voit que le rayon réfléchi MF passe par le centre H. Or le cercle qui a pour diametre GH, passe aussi par le point F; puisque l'angle GFH est droit. Donc les arcs GN, $\frac{1}{2} GF$, mesures du même angle GHN, seront entre eux comme les diametres MN, GH de leurs cercles; & partant l'arc $GF = GN = GB$. Il est donc évident que la caustique DFB est une roulette décrite par la révolution entiere du cercle GFH sur la droite BD.

Exemple V.

Fig. 105. 123. Soit encore la courbe AMD une demi-roulette ordinaire, dont la base BD est égale à la demi-circonférence ANB du cercle générateur. Et soient à présent les rayons incidents PM paralleles à la base BD.

Si l'on mene GQ perpendiculaire sur PM, les triangles rectangles GQM, BPN seront égaux & semblables; & partant $MQ = PN$. D'où l'on voit * qu'il faut prendre MF égale à l'appliquée correspondante PN dans le demi-cercle générateur ANB.

* Art. 95. 113.

Afin que le point F soit le plus éloigné qu'il est possible de l'axe AB, il faut que la tangente MF en ce point soit parallele à cet axe. L'angle PMF sera donc alors droit, sa moitié PMG ou PNB demi-droit; & partant le point P tombera dans le centre du cercle AND.

C'est une chose digne de remarque, que le point P approchant ensuite continuellement de l'extrémité B, le point F approche aussi de l'axe AB jusqu'à un certain point K, après quoi il s'en éloigne jusqu'en D; de sorte que la caustique $AFKFD$ a un point de rebroussement en K.

* Art. 110. 111. Pour le déterminer, je remarque * que la portion $AF =$

$PM + MF$, la portion $AFK = HL + LK$, & la portion KF de la partie KFD, eſt $= HL + LK - PM - MF$: d'où l'on voit que $HL + LK$ doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi nommant AH, x; HI, y; l'arc AI, u; l'on aura $HL + LK = u + 2y$, dont la différence donne $du + 2dy = 0$, & $\frac{adx}{y} + 2dy = 0$, en mettant pour du ſa valeur $\frac{adx}{y}$: d'où l'on tire $adx = -2ydy = 2xdx - 2adx$ à cauſe du cercle, & partant $AH\ (x) = \frac{3}{2}a$.

COROLLAIRE.

124. L'eſpace AFM ou $AFKFM$ renfermé par les portions de courbes AF ou $AFKF$, AM, & par le rayon réflechi MF, eſt égal à la moitié de l'eſpace circulaire APN. Car ſa différence, qui eſt le ſecteur FMO, eſt égale à la moitié du rectangle $PpSN$, différence de l'eſpace APN; puiſque les triangles rectangles MOm, MRm étant égaux & ſemblables, MO ſera égale à MR ou NS ou Pp, & que de plus $MF = PN$.

EXEMPLE VI.

125. Soit la courbe AMD une demi-roulette formée par la révolution du cercle MGN autour de ſon égal AGK, dont l'origine eſt en A, & le ſommet en D; ſoient les rayons incidents AM qui partent tous du point A. La ligne BH qui joint les centres des deux cercles générateurs, paſſe continuellement par le point touchant G, & les arcs GM, GA, comme auſſi leurs cordes, ſont toujours égaux; ainſi l'angle $HGM = BGA$, & l'angle $GMA = GAM$. Or l'angle $HGM + BGA = GMA + GAM$; puiſque ajoutant de part & d'autre le même angle AGM, on en forme deux droits. Donc l'angle HGM ſera toujours égal à l'angle GMA; & partant auſſi à l'angle de réflexion GMF: d'où il ſuit que MF paſſe toujours par le centre H du cercle mobile. FIG. 106.

Maintenant ſi l'on mene les perpendiculaires CE, GO ſur

le rayon incident AM: il eſt clair que $MO = OA$, & que

* *Art.* 100. $OE = \frac{1}{3} OM$; puiſque * le point C étant à la développée, $GC = \frac{1}{3} GM$. On aura donc $ME = \frac{2}{3} AM$, c'eſt-à-dire $a = \frac{2}{3} y$; & par conſéquent $MF \left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{2} y$: d'où l'on voit que ſi l'on mene GF perpendiculaire ſur MF, le point F ſera à la cauſtique AFK.

Le cercle qui a pour diametre GH, paſſe par le point F; & les arcs GM, $\frac{1}{2} GF$, meſures du même angle GHM, étant entre eux comme les diametres MN, GH de leurs cercles, l'arc GF ſera égal à l'arc GM, & par conſéquent à l'arc GA. D'où il eſt évident que la Cauſtique AFK eſt une roulette décrite par la révolution du cercle mobile HFG autour de l'immobile AGK.

Corollaire.

126. Si l'on décrit un cercle qui ait pour centre le point B, & pour rayon une droite égale à BH ou AK; & qu'il y ait une infinité de droites paralleles à BD qui tombent ſur

* *Art.* 120. ſa circonférence: il eſt viſible * qu'elles formeront en ſe réfléchiſſant la même cauſtique AFK.

Exemple VII.

Fig. 107. 127. Soit la courbe AMD une logarithmique ſpirale, avec les rayons incidents AM qui partent tous du centre A.

Si l'on mene par l'extrémité C du rayon de la développée la droite CA perpendiculaire ſur le rayon incident AM,

* *Art.* 91. elle le rencontrera * dans le centre A. C'eſt pourquoi AM $(y) = a$; & partant $MF \left(\frac{ay}{2y-a}\right) = y$. Le triangle AMF ſera donc iſoſcele; & comme les angles d'incidence & de réflexion AMT, FMS ſont égaux entre eux, il s'enſuit que l'angle AFM eſt égal à l'angle AMT. D'où il eſt clair

que la caustique AFK sera une logarithmique spirale qui ne différera de la proposée AMD que par sa position.

PROPOSITION II.

Problême.

128. *La caustique* HF *par réflexion étant donnée avec le point lumineux* B ; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle soit caustique par réflexion.* Fig. 108.

Ayant pris à discrétion sur une tangente quelconque HA le point A pour un des points de la courbe cherchée AM ; on décrira du centre B, de l'intervalle BA l'arc de cercle AP ; & d'un autre intervalle quelconque BM, un autre arc de cercle. Et ayant pris $AH + HE = BM - BA$ ou PM, on développera la caustique HF en commençant au point E ; & l'on décrira dans ce mouvement une ligne courbe EM qui coupera l'arc de cercle décrit du rayon BM, en un point M qui sera * à la courbe AM. Car par la construction $PM + MF = AH + HF$. * *Art.* 110.

Ou bien ayant attaché un fil BMF par ses extrémités en B & en F, on fera tendre ce fil par le moyen d'un style placé en M, que l'on fera mouvoir ensorte que l'on enveloppera par la partie MF de ce fil la caustique HF ; il est clair que ce style décrira dans ce mouvement la courbe cherchée MA.

AUTRE SOLUTION.

129. Ayant tiré à discrétion une tangente FM autre que HA, on cherchera sur elle un point M, tel que $BM + MF = BA + AH + HF$. Ce qui se fera en cette sorte.

Soit prise $FK = BA + AH + HF$, & divisant BK par le milieu en G, soit tirée la perpendiculaire GM : elle rencontrera la tangente FM au point cherché M. Car $BM = MK$.

Si le point B étoit infiniment éloigné de la courbe AM, c'est-à-dire que les rayons incidents BA, BM fussent paralleles à une ligne droite donnée de position ; la premiere construction auroit toujours lieu, en considérant que les arcs de cer- Fig. 109.

cle décrits du centre B deviennent des lignes droites perpendiculaires ſur les rayons incidents. Mais cette derniere deviendroit inutile; c'eſt pourquoi il faudroit lui ſubſtituer celle qui ſuit.

Soit priſe $FK = AH + HF$. Ayant trouvé le point M tel que MP parallele à AB perpendiculaire ſur AP, ſoit égale

* Art. 110. à MK : il eſt clair * que ce point ſera à la courbe cherchée AM; puiſque $PM + MF = AH + HF$. Or cela ſe fait ainſi.

Soit menée KG perpendiculaire ſur AP; & ayant pris $KO = KG$, ſoient tirées KP parallele à OG & PM parallele à GK : je dis que le point M ſera celui qu'on cherche. Car à cauſe des triangles ſemblables GKO, PMK, l'on aura $PM = MK$; puiſque $GK = KO$.

Si la cauſtique HF ſe réuniſſoit en un point; la courbe AM deviendroit une ſection conique.

COROLLAIRE I.

130. Il eſt clair que la courbe qui paſſe par tous les points K, eſt formée par le développement de la courbe HF en commençant en A, & qu'elle change de nature à meſure que le point A change de place ſur la tangente AH. Donc puiſque les courbes AM naiſſent toutes de ces courbes par

* Art. 108. la même conſtruction, qui eſt géométrique; il s'enſuit * qu'elles ſont d'une nature différente entre elles, & qu'elles ne ſont géométriques que lorſque la cauſtique HF eſt géométrique & rectifiable.

COROLLAIRE II.

FIG. 110. 131. Une ligne courbe DN étant donnée avec un point lumineux C; trouver une infinité de lignes telles que AM, enſorte que les rayons réfléchis DA, NM ſe réuniſſent en un point donné B, après s'être réfléchis de nouveau à la rencontre de ces lignes AM.

Si l'on imagine que la courbe HF ſoit la cauſtique de la donnée DN, formée par le point lumineux C; il eſt clair

que cette ligne HF doit être auſſi la cauſtique de la courbe AM ayant pour point lumineux le point donné B : de ſorte que $FK = BA + AH + HF$, & $NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC - CN$, puiſque * $HD + DC = HF + FN + NC$. Ce qui donne cette conſtruction. * *Art.* 110.

Ayant pris à diſcrétion ſur un rayon réfléchi quelconque le point A pour un des points de la courbe cherchée AM, on prendra ſur un autre rayon réfléchi NM tel qu'on voudra, la partie $NK = BA + AD + DC - CN$; & l'on trouvera le point cherché M comme ci-deſſus art. 129.



SECTION VII.

Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfraction.

DÉFINITION.

Fig. 111. Si l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, qui partent d'un même point lumineux B, se rompent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, en s'approchant ou s'éloignant de ses perpendiculaires MC, ensorte que les sinus CE des angles d'incidence CME, soient toujours aux sinus CG des angles de réfraction CMG, en même raison
Fig. 112. donnée de m à n; la ligne courbe HFN que touchent tous les rayons rompus ou leurs prolongements AH, MF, DN, est appellée *Caustique par réfraction.*

COROLLAIRE.

132. Si l'on enveloppe la caustique HFN en commençant au point A, l'on décrira la courbe ALK telle que la tangente LF plus la portion FH de la caustique sera continuellement égale à la même droite AH. Et si l'on conçoit une autre tangente Fml infiniment proche de FML, avec un autre rayon d'incidence Bm, & qu'on décrive des centres F, B, les petits arcs MO, MR : on formera deux petits triangles rectangles MRm, MOm qui seront semblables aux deux autres MEC, MGC, chacun à chacun; puisque si l'on ôte des angles droits RME, CMm le même angle EMm, les angles restants RMm, EMC seront égaux; & de même si l'on ôte des angles droits GMO, CMm le même angle GMm, les restants OMm, GMC seront égaux. C'est pourquoi $Rm . Om :: CE . CG :: m . n$. Or puisque Rm est
* Art. 96. la différence de BM, & Om celle de LM; il s'ensuit * que

BM

$BM - BA$ somme de toutes les différences Rm dans la portion de courbe AM, est à ML ou $AH - MF - FH$ somme de toutes les différences Om dans la même portion AM, comme m est à n; & partant que la portion FH $= AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM$.

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM, & que le rompu AH enveloppe ou développe la portion HF: mais on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidents est à la différence des rayons rompus (en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe avant que de tomber sur l'autre) comme m est à n. Par exemple, $BA - BM . AH - MF - FH :: m . n$; d'où l'on tire Fig. 112.

$$FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA.$$

Si l'on décrit du centre B l'arc du cercle AP; il est clair que PM sera la différence des rayons incidents BM, BA. Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD, les rayons incidents BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons. Fig. 111.

PROPOSITION I.

Problême général.

133. *La nature de la courbe* AMD, *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver sur le rayon rompu* MF *donné de position, le point* F *où il touche la caustique par réfraction.* Fig. 111.

Ayant trouvé* la longueur MC du rayon de la développée, au point donné M, & pris l'arc Mm infiniment petit, on tirera les droites Bm, Cm, Fm; on décrira des centres B, F les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, Ce, CG, Cg sur les rayons incidents & rompus; & l'on nommera les données BM, y; ME, a; MG, b; & le petit arc MR, dx. Cela posé, * *Sect.* 5.

Les triangles rectangles ſemblables MEC & MRm, MGC & MOm, BMR & BQe, donneront $ME(a)$. $MG(b)::MR(dx).MO=\frac{bdx}{a}$. Et $BM(y).BQ$ ou BE $(y+a)::MR(dx).Qe=\frac{adx+ydx}{y}$. Or par la propriété de la réfraction $Ce.Cg::CE.CG::m.n$. Et partant $m.n::Ce-CE$ ou $Qe\left(\frac{adx+ydx}{y}\right).Cg-CG$ ou $Sg=\frac{andx+nydx}{my}$. Donc à cauſe des triangles rectangles ſemblables FMO & FSg, l'on aura $MO-Sg\left(\frac{bmydx-anydx-aandx}{amy}\right)$. $MO\left(\frac{bdx}{a}\right)::MS$ ou $MG(b).MF=\frac{bbmy}{bmy-any-aan}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Fig. 112.

Fig. 113. Soit fait vers CM l'angle $ECH=GCM$, & ſoit priſe vers B, $MK=\frac{aa}{y}$. Je dis que ſi l'on fait $HK.HE::MG.MF$, le point F ſera à la cauſtique par réfraction.

Car à cauſe des triangles ſemblables CGM, CEH, l'on aura $CG.CE::n.m::MG(b).EH=\frac{bm}{n}$. D'où l'on tire $HE-ME$ ou $HM=\frac{bm-an}{n}$, $HM-MK$ ou $HK=\frac{bmy-any-aan}{ny}$; & partant $HK\left(\frac{bmy-any-aan}{ny}\right).HE\left(\frac{bm}{n}\right)::MG(b)$. $MF=\frac{bbmy}{bmy-any-aan}$.

Il eſt clair que ſi la valeur de HK eſt négative, celle de MF le ſera auſſi : d'où il ſuit que le point M tombe entre les points G, F, lorſque le point H ſe trouve entre les points K, E.

Fig. 111. 113. Si le point lumineux B tomboit du côté du point E, ou (ce qui eſt la même choſe) ſi la courbe AMD étoit concave du côté du point lumineux B, y deviendroit négative de poſitive qu'elle étoit auparavant, & l'on auroit par conſéquent

$MF = \frac{-bbmy}{-bmy+any-aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy-any+aan}$. Et la construction demeureroit la même.

Si l'on suppose que y devienne infinie, c'est-à-dire que le point lumineux B soit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidents seront paralleles entre eux, & l'on aura $MF = \frac{bbm}{bm-an}$, parceque le terme aan sera nul par rapport aux deux autres bmy, any; & comme $MK\left(\frac{aa}{y}\right)$ s'évanouit alors, il n'y aura qu'à faire $HM.HE::MG.MF$.

COROLLAIRE I.

134. On démontrera, de même que dans les caustiques par réflexion *, qu'une ligne courbe AMD n'a qu'une seule caustique par réfraction, la raison de m à n étant donnée; laquelle caustique est toujours géométrique & rectifiable, lorsque la courbe proposée AMD est géométrique.

* *Art.* 114. 115.

COROLLAIRE II.

135. Si le point E tombe de l'autre côté de la perpendiculaire MC par rapport au point G, & que CE soit égale à CG; il est clair que la caustique par réfraction se changera en caustique par réflexion. En effet, on aura MF $\left(\frac{bbmy}{bmy-any\mp aan}\right) = \frac{ay}{2y\mp a}$; puisque $m=n$, & que a devient négative de positive qu'elle étoit, & de plus égale à b. Ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la section précédente.

Si m est infinie par rapport à n, il est clair que le rayon rompu MF tombera sur la perpendiculaire CM: de sorte que la caustique par réfraction deviendra la développée. En effet on aura $MF=b$, qui devient en ce cas MC: c'est-à-dire que le point F tombera sur le point C, qui est à la développée.

COROLLAIRE III.

136. Si la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B, & que la valeur de MF $\left(\frac{bbmy}{bmy - any - aan}\right)$ ſoit poſitive; il eſt clair qu'il faudra prendre le point F du même côté du point G, par rapport au point M, comme on l'a ſuppoſé en faiſant le calcul: & qu'au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Il en eſt de même lorſque la courbe AMD eſt concave vers le point B; mais il faut obſerver qu'on aura pour lors $MF = \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. D'où il ſuit que les rayons rompus infiniment proches ſont convergents lorſque la valeur de MF eſt poſitive dans le premier cas, & négative dans le ſecond; & qu'au contraire ils ſont divergents lorſqu'elle eſt négative dans le premier cas, & poſitive dans le ſecond. Cela poſé; il eſt évident,

1°. Que ſi la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B, & que m ſoit moindre que n; ou que ſi elle eſt concave vers ce point, & que m ſurpaſſe n: les rayons rompus infiniment proches ſeront toujours divergens.

2°. Que ſi la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B, & que m ſurpaſſe n; ou que ſi elle eſt concave vers ce point, & que m ſoit moindre que n: les rayons rompus infiniment proches ſeront convergents, lorſque MK $\left(\frac{aa}{y}\right)$ eſt moindre que MH $\left(\frac{bm}{n} - a \text{ ou } a - \frac{bm}{n}\right)$; divergents, lorſqu'elle eſt plus grande; & paralleles, lorſqu'elle eſt égale. Or comme $MK = o$, lorſque les rayons incidents ſont paralleles, il s'enſuit qu'en ce cas les rayons rompus infiniment proches ſeront toujours convergents.

COROLLAIRE IV.

137. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura ME $(a) = o$; & partant $MF = b$. Ce qui fait voir que le point F tombe alors ſur le point G.

Si le rayon incident BM eſt perpendiculaire à la courbe

AMD, les droites $ME\ (a)$ & $MG\ (b)$ deviendront égales chacune au rayon CM de la développée; puiſqu'elles ſe confondent avec lui. On aura donc $MF = \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$, qui devient $\frac{bm}{m-n}$ lorſque les rayons incidents ſont paralleles entre eux.

Si le rayon rompu MF touche la courbe AMD au point M, l'on aura $MG\ (b) = o$. D'où l'on voit que la cauſtique touche alors la courbe donnée au point M.

Si le rayon CM de la développée eſt nul; les droites $ME\ (a)$, $MG\ (b)$ ſeront auſſi égales à zéro; & par conſéquent les termes aan, $bbmy$ ſeront nuls par rapport aux autres bmy, any. D'où il ſuit que $MF = o$; & qu'ainſi la cauſtique a le point M commun avec la courbe donnée.

Si le rayon CM de la développée eſt infini; les droites $ME\ (a)$, $MG\ (b)$ ſeront auſſi infinies; & par conſéquent les termes bmy, any ſeront nuls par rapport aux autres aan, $bbmy$: de ſorte qu'on aura $MF = \frac{bbmy}{\mp aan}$. Or * comme cette quantité eſt négative lorſque l'on ſuppoſe que le point F tombe de l'autre côté du point B par rapport à la ligne AMD, & qu'au contraire elle eſt poſitive lorſqu'on ſuppoſe qu'il tombe du même côté; il s'enſuit * que l'on doit prendre le point F du même côté du point B, c'eſt-à-dire que les rayons rompus infiniment proches ſont divergents. Il eſt évident que le petit arc Mm devient alors une ligne droite, & que la conſtruction précédente n'a plus de lieu. On peut lui ſubſtituer celle-ci, qui ſervira à déterminer les points des cauſtiques par réfraction lorſque la ligne AMD eſt droite.

* Art. 133.

* Art. 136.

Ayant mené BO perpendiculaire ſur le rayon incident BM, & qui rencontre en O la droite MC perpendiculaire ſur AD; on tirera OL perpendiculaire ſur le rayon rompu MG; & ayant fait l'angle BOH égal à l'angle LOM, on fera $BM . BH :: ML . MF$. Je dis que le point F ſera à la cauſtique par réfraction.

Fig. 114.

Car les triangles rectangles MEC & MBO, MGC & MLO seront toujours semblables de quelque grandeur que l'on suppose CM; & partant lorsqu'elle devient infinie, l'on aura encore $ME(a) . MG(b) :: BM(y) . ML = \frac{by}{a}$ Et à cause des triangles semblables OLM, OBH, l'on aura aussi $OL . OB(n.m) :: ML \frac{by}{a} . BH = \frac{bmy}{an}$. D'où l'on voit que $BM(y) . BH\left(\frac{bmy}{an}\right) :: ML\left(\frac{by}{a}\right) . MF\left(\frac{bbmy}{aan}\right)$.

COROLLAIRE V.

138. Il est clair que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on peut facilement trouver le troisieme.

EXEMPLE I.

FIG. 115. 139. Soit la courbe AMD un quart de cercle qui ait pour centre le point C; soient les rayons incidents BA, BM, BD paralleles entre eux, & perpendiculaires sur CD; soit enfin la raison de m à n, comme 3 à 2, qui est celle que souffrent les rayons de lumiere en passant de l'air dans le verre. Puisque la développée du cercle, AMD se réunit en un point C, qui en est le centre, il s'ensuit que si l'on décrit une demi-circonférence MEC qui ait pour diametre le rayon CM, & qu'on prenne la corde $CG = \frac{2}{3} CE$; la ligne MG sera le rayon rompu, sur lequel on déterminera le point F, comme l'on a enseigné ci-devant art. 133.

Pour trouver le point H où le rayon incident BA perpendiculaire sur AMD touche la caustique par réfraction, l'on aura * $AH \frac{bm}{m-n} = 3b = 3CA$. Et si l'on décrit une demi-circonférence CND qui ait pour diametre le rayon CD, & qu'on prenne la corde $CN = \frac{2}{3} CD$; il est clair * que le point N sera à la caustique par réfraction, puisque le rayon incident BD touche le cercle AMD au point D.

* Art. 137.
* Art. 137.

Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt viſible * que la portion $FH = AH - MF - \frac{2}{3} PM$: de ſorte que la cauſtique entiere $HFN = \frac{7}{3} CA - DN = \frac{7 - \sqrt{5}}{3} CA$. * Art. 132.

Si le quart de cercle AMD eſt concave vers les rayons incidents BM, & que la raiſon de m à n ſoit de 2 à 3; on prendra ſur la demi-circonférence CEM qui a pour diametre le rayon CM, la corde $CG = \frac{3}{2} CE$, & on tirera le rayon rompu MG ſur lequel on déterminera le point F par la conſtruction générale art. 133. Fig. 116.

On aura * $AH \left(\frac{bm}{m - n}\right) = -2b$, c'eſt-à-dire que AH ſera du côté * de la convexité du quart de cercle AMD, & double du rayon AC. Et ſi l'on ſuppoſe que CG ou $\frac{3}{2} CE$ ſoit égale à CM; il eſt manifeſte que le rayon rompu MF touchera le cercle AMD en M, puiſqu'alors le point G ſe confondra avec le point M. D'où il ſuit que ſi l'on prend $CE = \frac{2}{3} CD$, le point M tombera au point N où la cauſtique HFN * touche le quart de cercle AMD. Mais lorſque CE ſurpaſſe $\frac{2}{3} CD$, les rayons incidents BM ne pourront plus ſe rompre, c'eſt-à-dire paſſer du verre dans l'air; puiſqu'il eſt impoſſible que CG perpendiculaire ſur le rayon rompu MG, ſoit plus grande que CM : de ſorte que tous les rayons qui tomberont ſur la partie ND ſe réfléchiront. * Art. 137. * Art. 136. * Art. 137.

Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt clair * que la portion $FH = AH - MF + \frac{3}{2} PM$: de ſorte que menant NK parallele à CD, la cauſtique entiere $HFN = 2 CA + \frac{3}{2} AK = \frac{7 - \sqrt{5}}{2} CA$. * Art. 132.

EXEMPLE II.

FIG. 117. 140. Soit la courbe AMD une logarithmique ſpirale qui ait pour centre le point A duquel partent tous les rayons incidents AM.

* Art. 91. Il eſt clair * que le point E tombe ſur le point A, c'eſt-à-dire que $a = y$. Si donc l'on met à la place de a ſa valeur

* Art. 138. y dans $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$ valeur * de MF lorſque la courbe eſt concave du côté du point lumineux; on aura $MF = b$: d'où l'on voit que le point F tombe ſur le point G.

Si l'on mene la droite AG, & la tangente MT; l'angle AGO complément à deux droits de l'angle AGM, ſera égal à l'angle AMT. Car le cercle qui a pour diametre la ligne CM, paſſant par les points A & G, les angles AGO, AMT ont chacun pour meſure la moitié du même arc AM. Il eſt donc évident que la cauſtique AGN eſt la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & qu'elle n'en differe que par ſa poſition.

PROPOSITION II.

Problême.

FIG. 118. 141. *La cauſtique* HF *par réfraction étant donnée avec ſon point lumineux* B, *& la raiſon de* m *à* n; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle ſoit cauſtique par réfraction.*

Ayant pris à diſcrétion ſur une tangente quelconque HA, le point A pour un des points de la courbe AM, on décrira du centre B & de l'intervalle BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervalle quelconque BM un autre arc de cercle; & ayant pris $AE = \frac{n}{m} PM$, on décrira en enveloppant la cauſtique HF une ligne courbe EM, qui coupera l'arc de cercle décrit de l'intervalle BM, en un point M qui ſera à

* Art. 132. la courbe cherchée. Car * $PM . AE$ ou $ML :: m . n$.

AUTRE

AUTRE SOLUTION.

142. On cherchera sur une tangente quelconque FM, autre que HA, le point M tel que $HF + FM + \frac{n}{m}BM = HA + \frac{n}{m}BA$. C'est pourquoi si l'on prend $FK = \frac{n}{m}BA + AH - FH$, & qu'on trouve sur FK un point M tel que $MK = \frac{n}{m}BM$, il sera * celui qu'on cherche. Or cela se peut faire en décrivant une ligne courbe GM telle que menant d'un de ses points quelconques M aux points donnés B, K, les droites MB, MK, elles aient toujours entre elles un même rapport que m à n. Il n'est donc question que de trouver la nature de ce lieu. * *Art.* 132. FIG. 119.

Soit pour cet effet menée MR perpendiculaire sur BK, & nommée la donnée BK, a; & les indéterminées BR, x; RM, y. Les triangles rectangles BRM, KRM, donneront $BM = \sqrt{xx + yy}$, & $KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$: de sorte que pour remplir la condition du problême, l'on aura $\sqrt{xx + yy} . \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} :: m . n$. D'où l'on tire $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$, qui est un lieu au cercle que l'on construira ainsi.

Soit prise $BG = \frac{am}{m+n}$, & $BQ = \frac{am}{m-n}$, & soit décrit du diametre GQ la demi-circonférence GMQ: je dis qu'elle sera le lieu requis. Car ayant QR ou $BQ - BR = \frac{am}{m-n} - x$, & RG ou $BR - BG = x \frac{-am}{m+n}$; la propriété du cercle, qui donne $QR \times RG = \overline{RM}^2$, donnera en termes analytiques $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$.

Si les rayons incidents BA, BM, sont paralleles à une droite donnée de position, la premiere solution aura tou- FIG. 120.

jours lieu; mais celle-ci deviendra inutile, & on pourra lui ſubſtituer la ſuivante.

Soit priſe $FL = AH - HF$; & ayant mené LG parallele à AB & perpendiculaire ſur AP, on prendra $LO = \frac{n}{m} LG$, & on tirera LP parallele à GO, & PM parallele à GL. Il eſt clair * que le point M ſera celui qu'on cherche; car puiſque $LO = \frac{n}{m} LG$, $ML = \frac{n}{m} PM$.

* *Art.* 132.

Si la cauſtique FH par réfraction, ſe réunit en un point; les courbes AM deviennent les Ovales de *Deſcartes*, qui ont fait tant de bruit parmi les Géometres.

COROLLAIRE I.

143. On démontre de même que dans les cauſtiques par réflexion *, que les courbes AM ſont de nature différente entre elles, & qu'elles ne ſont géométriques que lorſque la cauſtique HF par réfraction eſt géométrique & rectifiable.

* *Art.* 130.

COROLLAIRE II.

FIG. 121. 144. Une ligne courbe AM étant donnée avec le point lumineux B, & la raiſon de m à n; trouver une infinité de lignes telles que DN, enſorte que les rayons rompus MN ſe rompent de nouveau à la rencontre de ces lignes DN pour ſe réunir en un point donné C.

Si l'on imagine que la ligne courbe HF ſoit la cauſtique par réfraction de la courbe donnée AM, formée par le point lumineux B, il eſt clair que cette même ligne HF doit être auſſi la cauſtique par réfraction de la courbe cherchée DN, ayant pour point lumineux le point donné C. C'eſt pourquoi * $\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MF + FH$, & $NF + FH - \frac{n}{m} NC = HD - \frac{n}{m} DC$; & partant $\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MN + HD - \frac{n}{m} DC + \frac{n}{m} NC$; & tranſpoſant à l'ordinaire, $\frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM + \frac{n}{m} DC +$

* *Art.* 132.

$AD = MN + \frac{n}{m}NC$. Ce qui donne cette construction.

Ayant pris à discrétion sur un rayon rompu quelconque AH le point D pour un de ceux de la courbe cherchée DN, on prendra sur un autre rayon rompu quelconque MF la partie $MK = \frac{n}{m}BA - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}DC + AD$; & ayant trouvé, comme ci dessus *, le point N tel que $NK = \frac{n}{m}NC$, il est clair * qu'il sera à la courbe DN. * *Art.* 142. * *Art.* 132.

COROLLAIRE GÉNÉRAL

Pour les trois sections précédentes.

145. Il est manifeste * qu'une ligne courbe n'a qu'une seule développée, qu'une seule caustique par réflexion, & qu'une seule par réfraction, le point lumineux & le rapport des sinus étant donnés, lesqu'elles lignes sont toujours géométriques & rectifiables lorsque cette courbe est géométrique. Au lieu qu'une même ligne courbe peut être la développée, & l'une & l'autre caustique dans le même rapport des sinus, & dans la même position du point lumineux, commune à une infinité de lignes très différentes entre elles, & qui ne sont géométriques que lorsque cette courbe est géométrique & rectifiable. * *Art.* 80, 85, 107, 108, 114, 115, 128, 129, 134, 143.



SECTION VIII.

Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes.

PROPOSITION I.

Problême.

Fig. 122. 146. SOIT *donnée une ligne quelconque* AMB, *qui ait pour axe la droite* AP; *soient de plus entendues une infinité de paraboles* AMC, AmC, *qui passent toutes par le point* A, *& qui aient pour axe les appliquées* PM, pm. *Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces paraboles.*

Il est clair que le point touchant de chaque parabole AMC est le point d'intersection C où la parabole AmC, qui en est infiniment proche, la coupe. Cela posé, & ayant mené CK parallele à MP, soient nommées les données AP, x; PM, y; & les inconnues AK, u; KC, z. On aura par la propriété de la parabole, $\overline{AP}^2 (xx) . \overline{PK}^2 (uu - 2ux + xx) :: MP (y) . MP - CK (y - z)$. Ce qui donne $zxx = 2uxy - uuy$, qui est l'équation commune à toutes les paraboles telles que AMC. Or je remarque que les inconnues AK (u) & KC (z) demeurent les mêmes, pendant que les données AP (x) & PM (y) varient en devenant Ap & pm; & qu'il n'arrive que KC (z) demeure la même, que lorsque le point C est celui d'intersection : car il est visible que par-tout ailleurs la droite KC coupera les deux paraboles AMC, AmC en deux différents points, & qu'elle aura par conséquent deux valeurs qui répondront à la même de AK. C'est pourquoi si l'on traite u & z comme constantes, en prenant la différence de l'équation que l'on vient de trouver, on déterminera le point C à être celui d'intersection. On aura donc $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$:

d'où l'on tire l'inconnue $AK\ (u) = \frac{2xxdy - 2yxdx}{xdy - 2ydx}$ en mettant pour z sa valeur $\frac{2uxy - uuy}{xx}$; & la nature de la courbe AMB étant donnée, on trouvera une valeur de dy en dx, laquelle étant substituée dans la valeur de AK, cette inconnue sera enfin exprimée en termes entiérement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

Si au lieu des paraboles AMC, on proposoit d'autres lignes droites ou courbes dont la position fût déterminée, on resoudroit toujours le Problême à peu près de la même maniere : & c'est ce que l'on verra dans les Propositions suivantes.

EXEMPLE.

147. Que l'équation $xx = 4ay - 4yy$ exprime la nature de la courbe AMB : elle sera une demi-ellipse qui aura pour petit axe, la droite $AB = a$ perpendiculaire sur AP, & dont le grand axe sera double du petit.

On trouve $xdx = 2ady - 4ydy$; & partant AK $\left(\frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}\right) = \frac{ax}{y} = u$. D'où il suit que si l'on prend AK quatrieme proportionnelle à MP, PA, AB, & qu'on mene KC perpendiculaire sur AK; elle ira couper la parabole AMC au point cherché C.

Pour avoir la nature de la courbe qui touche toutes les paraboles, ou qui passe par tous les points C ainsi trouvés, on cherchera l'équation qui exprime la relation de $AK\ (u)$ à $KC\ (z)$ en cette sorte. Mettant à la place de u sa valeur $\frac{ax}{y}$ dans $zxx = 2uxy - uuy$, l'on en tire $y = \frac{aa}{2a - z}$; & partant x ou $\frac{uy}{a} = \frac{au}{2a - z}$. Si donc l'on met ces valeurs à la place de x & y dans $xx = 4ay - 4yy$, on formera l'équation $uu = 4aa - 4az$ où x & y ne se rencontrent plus, & qui exprime la relation de AK à KC. D'où l'on voit que la courbe cherchée est une parabole qui a pour axe la ligne BA, pour sommet le point B, pour foyer le point A, &

dont le parametre par conséquent eſt quadruple de AB.

On vient de trouver $y = \frac{aa}{2a - z}$, d'où l'on tire $KC (z) = \frac{2ay - aa}{y}$. Or comme cette valeur eſt poſitive lorſque $2y$ ſurpaſſe a, négative lorſqu'il eſt moindre, & nulle lorſqu'il lui eſt égal : il s'enſuit que le point touchant C tombe au-deſſus de AP dans le premier cas, comme l'on avoit ſuppoſé en faiſant le calcul ; au deſſous dans le ſecond, & enfin ſur AP dans le troiſieme.

Si l'on mene la droite AC qui coupe MP en G ; je dis que $MG = BQ$, & que le point G eſt le foyer de la parabole AMC. Car 1°. $AK \left(\frac{ax}{y}\right) . KC \left(\frac{2ay - aa}{y}\right) :: AP(x) . PG = 2y - a$; & partant $MG = a - y = BQ$. 2°. Le parametre de la parabole AMC, eſt $= 4a - 4y$ en mettant pour xx ſa valeur $4ay - 4yy$; & partant $MG (a - y)$ eſt la quatrieme partie du parametre : d'où l'on voit que le point G eſt le foyer de la parabole ; & qu'ainſi l'angle BAC doit être diviſé en deux également par la tangente en A.

Il ſuit de ce que le parametre de la parabole AMC eſt quadruple de BQ, que le ſommet M tombant en A, le parametre ſera quadruple de AB ; & qu'ainſi la parabole, qui a pour ſommet le point A, eſt aſymptotique de celle qui paſſe par tous les points C.

Comme la parabole BC touche toutes les paraboles telles que AMC ; il eſt clair que toutes ces paraboles couperont la ligne déterminée AC en des points qui ſeront plus proches du point A que le point C. Or l'on démontre dans la Baliſtique (en ſuppoſant que AK ſoit horizontale) que toutes les paraboles telles que AMC marquent le chemin que décrivent en l'air les bombes qui ſeroient jettées par un mortier placé en A dans toutes les élévations poſſibles avec la même force. D'où il ſuit que ſi l'on mene une droite qui diviſe par le milieu l'angle BAC ; elle marquera la poſition que doit avoir le mortier, afin que la bombe qu'il jette, tombe ſur le plan AC donné de poſition, en un point C plus éloigné du mortier, qu'en toute autre élévation.

PROPOSITION II.

Problême.

148. *Soit donnée une courbe quelconque* AM, *qui ait pour axe la droite* AP; *trouver une autre courbe* BC *telle qu'ayant mené à discrétion l'appliquée* PM, *& la perpendiculaire* PC *à cette courbe, ces deux lignes* PM, PC *soient toujours égales entre elles.* FIG. 123.

Si l'on conçoit une infinité de cercles décrits des centres P, p, & des rayons PC, pC égaux à PM, pM; il est clair que la courbe cherchée BC doit toucher tous ces cercles, & que le point touchant C de chaque cercle est le point d'intersection où le cercle qui en est infiniment proche, le coupe. Cela posé, soit menée CK perpendiculaire sur AP; soient nommées les données & variables AP, x; PM ou PC, y; les inconnues & constantes AK, u; KC, z; & l'on aura par la propriété du cercle $\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2$, c'est-à-dire en termes analytiques $yy = xx - 2ux + uu + zz$, qui est l'équation commune à tous ces cercles, dont la différence est $2ydy = 2xdx - 2udx$: d'où l'on tire PK $\left(x - u = \frac{ydy}{dx}\right)$; ce qui donne cette construction générale.

Soit menée MQ perpendiculaire à la courbe AM; & ayant pris $PK = PQ$, soit tirée KC parallele à PM: je dis qu'elle rencontrera le cercle décrit du centre P & du rayon $PC = PM$ au point C où il touche la courbe cherchée BC. Ce qui est évident; puisque $PQ = \frac{ydy}{dx}$.

On peut encore trouver la valeur de PK de cette autre maniere.

Ayant mené PO perpendiculaire sur Cp, les triangles rectangles pOP, PKC seront semblables; & partant Pp $(dx) . Op\ (dy) :: PC\ (y) . PK = \frac{ydy}{dx}$.

Lorsque $PQ = PM$, il est clair que le cercle décrit du

rayon PC, touchera KC au point K : de ſorte que le point touchant C ſe confondra avec le point K, & tombera par conſéquent ſur l'axe.

Mais lorſque PQ ſurpaſſera PM, le cercle décrit du rayon PC ne pourra toucher la courbe BC; puiſqu'il ne pourra rencontrer la droite KC en aucun point.

EXEMPLE.

FIG. 123. 149. Soit la courbe donnée AM, une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura PQ ou PK $(x - u) = \frac{1}{2}a$; & par conſéquent $x = \frac{1}{2}a + u$, & $yy = \frac{1}{4}aa + zz$. à cauſe du triangle rectangle PKC. Or ſi l'on met ces valeurs dans $ax = yy$, on formera l'équation $\frac{1}{2}aa + au = \frac{1}{4}aa + zz$ ou $\frac{1}{4}aa + au = zz$, qui exprime la nature de la courbe BC. D'où il eſt clair que cette courbe eſt la même parabole que AM; puiſqu'elles ont l'une & l'autre le même parametre a, & que ſon ſommet B eſt éloigné du ſommet A de la diſtance $BA = \frac{1}{4}a$.

PROPOSITION III.

Problême.

FIG. 124. 150. *Soit donnée une ligne courbe quelconque* AM, *qui ait pour diametre la droite* AP, *& dont les appliquées* PM, pm *ſoient paralleles à la droite* AQ *donnée de poſition ; & ayant mené* MQ, mq *paralleles à* AP, *ſoient tirées les droites* PQC, pqC. *On demande la courbe* AC *qui a pour tangentes toutes ces droites : ou, ce qui eſt la même choſe, il s'agit de déterminer ſur chaque droite* PQC *le point touchant* C.

Ayant imaginé une autre tangente pqC infiniment proche de PQC, & mené CK parallele à AQ, on nommera les données & variables AP, x; PM ou AQ, y; les inconnues

connues & constantes AK, u; KC, z; & les triangles semblables PAQ, PKC donneront AP (x). AQ (y) :: PK $(x+u)$. KC $(z)=y+\frac{uy}{x}$, qui est l'équation commune à toutes les droites telles que KC. Sa différence est $dy + \frac{uxdy - uydx}{xx} = o$, d'où l'on tire AK $(u) = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$. Ce qui donne cette construction générale.

Soit menée la tangente MT, & soit prise AK troisieme proportionnelle à AT, AP : je dis que si l'on mene KC parallele à AQ, elle ira couper la droite PQC au point cherché C.

Car $AT\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right)$. $AP(x)$ :: $AP(x)$. $AK = \frac{xxdy}{ydx - xdy}$.

EXEMPLE I.

151. Soit la courbe donnée AM, une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura $AT = AP$; d'où il suit que AK $(u) = x$, c'est-à-dire que le point K tombe sur le point T. Si l'on veut à présent avoir une équation qui exprime la relation de AK (u) à KC (z); on trouvera $KC(z) = 2y$, puisque l'on vient de trouver que PK est double de AP. Mettant donc à la place de x & y leurs valeurs u & $\frac{1}{2}z$ dans $ax = yy$, on aura $4au = zz$: d'où l'on voit que la courbe AC est une parabole qui a pour sommet le point A, & pour parametre une ligne quadruple du parametre de la parabole AM. FIG. 124.

EXEMPLE II.

152. Soit la courbe donnée AM, un quart de cercle BMD qui ait pour centre le point A, & pour rayon la ligne AB ou AD, que j'appelle a. Il est clair que PQ est toujours égale au rayon AM ou AB, c'est-à dire qu'elle est par-tout la même : de sorte que l'on peut concevoir que ses extrémités P, Q glissent le long des côtés BA, AD de FIG. 125.

l'angle droit BAD. On aura $AK(u) = \frac{x^3}{aa}$, puiſque $AT = \frac{aa}{x}$; & les paralleles KC, AQ donneront $AP(x) . PQ(a) :: AK\left(\frac{x^3}{aa}\right) . QC = \frac{xx}{a}$. D'où l'on voit que pour avoir le point touchant C, il n'y a qu'à prendre QC troiſieme proportionnelle à PQ & AP. Si l'on cherche l'équation qui exprime la nature de la courbe BCD, on trouvera celle-ci,

$$\begin{array}{lllll} u^6 & -\ 3aau^4 & +\ 3a^4uu & -\ a^6 & = 0. \\ & +\ 3zz & +\ 21aazz & +\ 3a^4zz & \\ & & +\ 3z^4 & -\ 3aaz^4 & \\ & & & +\ z^6 & \end{array}$$

COROLLAIRE I.

153. Si l'on veut chercher le rapport de la portion DC de la courbe BCD à ſa tangente CP, l'on imaginera une autre tangente cp infiniment proche de CP; & ayant décrit du centre C le petit arc PO, l'on aura $cp - CP$, ou $Op - Cc = -\frac{2xdx}{a}$, pour la différence de $CP = \frac{aa-xx}{a}$: d'où l'on tire $Cc = Op + \frac{2xdx}{a}$. Or à cauſe des triangles rectangles ſemblables QPA, PpO, l'on aura $PQ(a) . AP(x) :: Pp(dx) . Op = \frac{xdx}{a}$, & partant $Cc = \frac{3xdx}{a} = DC - Dc$. Il eſt donc manifeſte qu'en quelque endroit que l'on prenne le point C, l'on aura toujours $DC - Dc\left(\frac{3xdx}{a}\right) . CP - cp\left(\frac{2xdx}{a}\right) :: 3 . 2$. D'où il ſuit que la ſomme de toutes les différences $DC - Dc$ qui répondent à la droite PD, c'eſt-
* Art. 96. à-dire * la portion DC de la courbe BCD, eſt à la ſomme de toutes les différences $CP - cp$ qui répondent à la même
* Art. 96. droite PD, c'eſt-à-dire * à la tangente $CP :: 3 . 2$. Et de même que la courbe entiere BCD eſt à ſa tangente $BA :: 3 . 2$.

COROLLAIRE II.

154. Si l'on développe la courbe BCD en commençant par le point D, on formera la ligne courbe DNF telle que $CN.CP :: 3.2$, puisque CN est toujours égale à la portion DC de la courbe BCD. D'où il suit que les secteurs semblables CNn, CPO sont entre eux $:: 9.4$; & partant que l'espace DCN renfermé par les courbes DC, DN, & par la droite CN qui est tangente en C & perpendiculaire en N, est à l'espace DCP renfermé par la courbe DC, & par les deux tangentes DP, CP, comme 9.4.

COROLLAIRE. III.

155. Le centre de pesanteur du secteur CNn doit être situé sur l'arc PO; puisque $CP = \frac{2}{3} CN$. Et comme cet arc est infiniment petit, il s'ensuit que ce centre doit être sur la droite AD; & partant que le centre de pesanteur des espaces DCN, BDF, qui sont composés de tous ces secteurs, doit être sur cette droite AD : de sorte que si l'on décrivoit de l'autre côté de BF une figure toute pareille à BDF, le centre de pesanteur de la figure entiere seroit au point A.

COROLLAIRE IV.

156. A cause des triangles rectangles semblables PQA, pPO, l'on aura $PQ(a).AQ$ ou $PM(\sqrt{aa-xx}) :: Pp(dx)$. $PO = \frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}$. Et à cause des secteurs semblables CPO, CNn, l'on aura aussi $CP.CN$, ou $2.3 :: PO\left(\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}\right)$. $Nn = \frac{3dx\sqrt{aa-xx}}{2a}$. Or le rectangle $MP \times Pp$, c'est-à-dire * le petit espace circulaire $MPpm = dx\sqrt{aa-xx}$. On aura donc $AB \times Nn = \frac{3}{2} MPpm$: d'où il suit que la por-

* Art. 2.

tion ND de la courbe DNF étant multipliée par le rayon AB, eſt ſeſquialtere du ſegment circulaire DMP, & que la courbe entiere DNF eſt égale aux trois quarts de BMD quatrieme partie de la circonférence du cercle.

PROPOSITION IV.

Problême.

Fig. 126. 157. *Soit donnée une courbe quelconque* AM, *qui ait pour axe la droite* AP; & *ſoient entendues une infinité de perpendiculaires* MC, mC *à cette courbe. On demande la courbe qui a pour tangentes toutes ces perpendiculaires : ou, ce qui eſt la même choſe, il faut trouver ſur chaque perpendiculaire* MC *le point touchant* C.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire mC infiniment proche de MC, avec une appliquée MP, l'on menera par le point d'interſection C les droites CK perpendiculaire & CE parallele à l'axe : ayant enſuite nommé les données & variables AP, x; PM, y; les inconnues & conſtantes AK, u; KC, z; l'on aura $PQ = \frac{ydy}{dx}$, PK ou $CE = u - x$, $ME = y + z$; & les triangles rectangles ſemblables MPQ, MEC donneront $MP(y) . PQ(\frac{ydy}{dx}) :: ME(y+z) . EC(u-x) = \frac{ydy + zdy}{dx}$, qui eſt une équation commune à toutes les perpendiculaires telles que MC, & dont la différence (en ſuppoſant dx conſtante) donne $-dx = \frac{yddy + dy^2 + zddy}{dx}$: d'où l'on tire $ME(z+y) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Or la nature de la courbe AM étant donnée, l'on aura des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2, leſquelles étant ſubſtituées dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, donneront pour ME une valeur entiérement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit propoſé.

Il eſt évident que la courbe qui paſſe par tous les points C, eſt la développée de la courbe AM, & comme l'on en

a traité exprès dans la Section cinquieme, il seroit inutile d'en donner ici des exemples nouveaux.

PROPOSITION V.

Problême.

158. *Deux lignes quelconques* AM, BN *étant données avec une ligne droite* MN *qui demeure toujours la même; on suppose que les extrémités* M, N *de cette ligne glissent continuellement le long des deux autres, & l'on demande la courbe qu'elle touche toujours dans ce mouvement.* FIG. 127.

Ayant mené les tangentes MT, NT, & imaginé une autre droite mn infiniment proche de MN, & qui la coupe par conséquent au point C où elle touche la courbe dont il s'agit de déterminer les points. Il est clair que la droite MN, pour parvenir en mn, a parcouru par ses extrémités les petites portions Mm, Nn des lignes AM, BN, lesquelles sont communes à cause de leur infinie petitesse, aux tangentes TM, TN: de sorte que l'on peut concevoir que la ligne MN pour parvenir dans la situation infiniment proche mn, ait glissé le long des droites TM, TN données de position.

Cela bien entendu, soient menées sur NT les perpendiculaires MP, CK; soient nommées les données & variables TP, x; PM, y; les inconnues & constantes TK, u; KC, z; & la donnée MN qui demeure par-tout la même, a. Le triangle rectangle MPN donnera $PN = \sqrt{aa-yy}$; & à cause des triangles semblables NPM, NKC, l'on aura $NP(\sqrt{aa-yy}).PM(y)::NK(u-x-\sqrt{aa-yy}).KC(z) = \frac{uy-xy}{\sqrt{aa-yy}} - y$, dont la différence donne $aaudy - aaxdy - aaydx + y^3dx = aady - yydy\sqrt{aa-yy}$: d'où en faisant $\sqrt{aa-yy} = m$ pour abréger, l'on tire $PK(u-x) = \frac{m^3dy + mmydx}{aady} = \frac{m^3+mmx}{aa}$ en mettant pour ydx sa valeur xdy, à cause des triangles semblables mRM,

MPT; & partant $MC = \frac{mm+mx}{a}$; ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée TE perpendiculaire ſur MN, & ſoit priſe $MC = NE$: je dis que le point C ſera celui qu'on cherche. Car à cauſe des triangles rectangles ſemblables MNP, TNE, l'on aura $MN(a) . NP(m) :: NT(m+x) . NE$ ou $MC = \frac{mm+mx}{a}$.

Autre maniere. Ayant mené TE perpendiculaire ſur MN, & décrit du centre C les petits arcs MS, NO, on nommera les données NE, r; ET, s; MN, a; & l'inconnue CM, t. On aura Sm ou $On = dt$; & les triangles rectangles ſemblables MET & mSM, NET & nON, CMS & CNO donneront $ME(r-a) . ET(s) :: mS(dt) . SM = \frac{sdt}{r-a}$. Et $NE(r) . ET(s) :: nO(dt) . ON = \frac{sdt}{r}$. Et $MS - NO \left(\frac{asdt}{rr-ar}\right) . MS \left(\frac{sdt}{r-a}\right) :: MN(a) . MC(t) = r$. Ce qui donne la même conſtruction que ci-deſſus.

Si l'on ſuppoſe que les lignes AM, BN ſoient des droites qui faſſent entre elles un angle droit; il eſt viſible que la courbe cherchée eſt la même que celle de l'article 152.

PROPOSITION VI.

Problême.

FIG. 128. 159. *Soient données trois lignes quelconques* L, M, N; *& ſoient entendues de chacun des points* L, l *de la ligne* L *deux tangentes* LM *&* LN, lm *&* ln, *aux deux courbes* M *&* N, *une à chacune. On demande la quatrieme courbe* C, *qui ait pour tangentes toutes les droites* MN, mn *qui joignent les points touchants des courbes* M, N.

Ayant tiré la tangente LE, & mené d'un de ſes points quelconques E les perpendiculaires EF, EG ſur les deux autres tangentes ML, NL, on concevra que le point l ſoit

infiniment près du point L; on tirera les petites droites LH, LK perpendiculaires ſur ml, nl; comme auſſi les perpendiculaires MP, mP, NQ, nQ ſur les tangentes ML, ml, NL, nl, leſquelles perpendiculaires s'entrecoupent aux points P & Q. Tout cela formera les triangles rectangles ſemblables EFL & LHl, EGL & LKl; comme auſſi les triangles LMH & MPm, LnK & NQn rectangles en H & m, K & N, qui ſeront ſemblables entre eux, puiſque les angles LMH, MPm étant joints l'un ou l'autre au même angle PMm, font un droit. On prouvera de même, que les angles LnK, NQn ſont égaux entre eux.

Cela poſé, on nommera le petit côté Mm du polygone qui compoſe la courbe M, du; & les données EF, m; EG, n; MN ou mn, a; ML ou ml, b; NL ou nl, c; MP ou mP, f; NQ ou nQ, g (je prends ici les droites MP, NQ pour données, parceque la nature des courbes M, N étant donnée par la ſuppoſition, on les pourra toujours trouver *); & l'on aura, 1°. $MP(f).ML(b)::Mm$ * *Art.* 78.
$(du).LH=\frac{bdu}{f}$. 2°. $EF(m).EG(n)::LH\left(\frac{bdu}{f}\right)$. $LK=\frac{bndu}{mf}$. 3°. LN ou Ln $(c).nQ(g)::LK\left(\frac{bndu}{mf}\right)$. $nN=\frac{bgndu}{cfm}$. 4°. (menant MR parallele à NL ou nl) $ml(b).ln(c)::mM(du).MR=\frac{cdu}{b}$. 5°. $MR+Nn$ $\left(\frac{cdu}{b}+\frac{bgndu}{cfm}\right).MR\left(\frac{cdu}{b}\right)::MN(a).MC=\frac{accfm}{ccfm+bbgn}$. Ce qu'il falloit trouver.

Si la tangente EL tomboit ſur la tangente ML, il eſt clair que $EF(m)$ deviendroit nulle ou zéro; & partant que le point cherché C tomberoit ſur le point M. De même ſi la tangente EL ſe confondoit avec la tangente LN; alors $EG(n)$ deviendroit nulle; & l'on auroit par conſéquent $MC=a$; d'où l'on voit que le point cherché C tomberoit auſſi ſur le point N. Et enfin ſi la tangente EL tomboit dans l'angle GLl; en ce cas $EG(n)$ deviendroit négative; ce

qui donneroit alors $MC = \frac{accfm}{ccfm - bbgn}$; & le point cherché C ne tomberoit plus entre les points M & N, mais de part ou d'autre.

EXEMPLE I.

FIG. 129. 160. Supposons que les courbes M & N ne fassent qu'un cercle. Il est clair en ce cas que $b = c$, & $f = g$; ce qui donne $MC = \frac{am}{m + n}$, d'où l'on voit qu'il ne faut alors que couper la droite MN en raison donnée de m à n, pour avoir le point cherché C; c'est-à-dire ensorte que $MC . NC :: m . n$.

EXEMPLE II.

161. Supposons que les courbes M & N soient une section conique quelconque. La construction générale se peut changer en cette autre qui est beaucoup plus simple, si l'on fait attention à une propriété des sections coniques, que l'on trouve démontrée dans les livres qui en traitent : savoir que si l'on mene de chacun des points L, l d'une ligne droite EL deux tangentes LM & LN, lm & ln à une Section conique; toutes les droites MN, mn qui joignent les points touchans, se couperont dans le même point C, par lequel passe le diametre AC, dont les ordonnées sont paralleles à la droite EL. Car il suit de-là, que pour avoir le point C, il ne faut que mener un diametre qui ait ses ordonnées paralleles à la tangente EL.

Il est évident que dans le cercle, le diametre doit être perpendiculaire sur la tangente EL; c'est-à-dire qu'en menant de son centre A une perpendiculaire AB sur cette tangente, elle coupera la droite MN au point cherché C.

REMARQUE.

FIG. 128. 162. On peut par le moyen de ce problême résoudre celui-ci qui dépend de la méthode des tangentes.

Les trois courbes C, M, N étant données, on fera rouler une ligne droite MN autour de la courbe C, ensorte

qu'elle

qu'elle la touche continuellement ; on tirera par les points *M*, *N*, où elle coupe les courbes *M* & *N*, les tangentes *ML*, *NL* qui s'entrecoupent en un point *L*, lequel décrit dans ce mouvement une quatrieme courbe *Ll*. Il s'agit de tirer la tangente *LE* de cette courbe, la position des droites *MN*, *ML*, *NL* étant donnée avec le point touchant *C*.

Car il est visible que ce problême n'est que l'inverse du précédent, & qu'ici *MC* est donnée : ce qu'on cherche, c'est la raison de *EF*, *EG*, qui détermine la position de la tangente *EL*. C'est pourquoi si l'on nomme la donnée *MC*, *h* ; l'on aura $\frac{accfm}{ccfm + bbgn} = h$: d'où l'on tire $m = \frac{bbghn}{accf - ccfh}$; & par conséquent la tangente *LE* doit être tellement située dans l'angle donné *MLG*, que si l'on mene d'un de ses points quelconques *E* les perpendiculaires *EF*, *EG* sur les côtés de cet angle, elles soient toujours entre elles en raison donnée de $bbgh$ à $accf - ccfh$. Or cela se fait en menant *MD* parallele à *NL*, & égale à $\frac{bgh}{accf - ccfh}$.

Il est évident * que si les deux courbes *M* & *N* ne font qu'une section conique, il ne faudra que tirer la tangente *LE* parallele aux ordonnées du diametre qui passe par le point *C*. FIG. 129. * *Art.* 161.



SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

Problême.

FIG. 130. 163. SOIT *une ligne courbe* AMD (AP$=$x, PM$=$y, AB$=$a) *telle que la valeur de l'appliquée* y *ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zéro lorſque* x$=$a, *c'eſt-à-dire lorſque le point* P *tombe ſur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD.

Soient entendues deux lignes courbes ANB, COB, qui aient pour axe commun la ligne AB, & qui ſoient telles que l'appliquée PN exprime le numérateur, & l'appliquée PO le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les PM: de ſorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il eſt clair que ces deux courbes ſe rencontreront au point B; puiſque par la ſuppoſition PN & PO deviennent chacune zéro lorſque le point P tombe en B. Cela poſé, ſi l'on imagine une appliquée bd infiniment proche de BD, & qui rencontre les lignes courbes ANB, COB aux points f, g; l'on aura $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle * ne differe pas de BD. (* *Art.* 2.)
Il n'eſt donc queſtion que de trouver le rapport de bg à bf. Or il eſt viſible que la coupée AP devenant AB, les appliquées PN, PO deviennent nulles; & que AP devenant Ab, elles deviennent bf, bg. D'où il ſuit que ces appliquées, elles-mêmes bf, bg, ſont la différence des appliquées en B & b par rapport aux courbes ANB, COB; & partant que ſi l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la

divise par la différence du dénominateur, après avoir fait $x = a = Ab$ ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée bd ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE. I.

164. Soit $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il est clair que lorsque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zéro. C'est pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la divisera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'est-à-dire qu'on divisera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. Soit $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$, lorsque $x = a$.

On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $aax^2 + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$, & substituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.

NOTE VII.

La théorie que notre Auteur indique dans ce problême est assez importante pour que nous croyons devoir la traiter avec plus de détail. Mais il faut reprendre les choses d'un peu plus haut.

1. On demande de mener une tangente sur la courbe représentée par l'équation $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$, du point où

$x = o$? On a en général $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{3ay^3 + 3a^2y^2}{2x^3 - 2a^2x}$, expression qui devient $\frac{o}{o}$ au point en question. Mais j'ai tiré $\frac{dx}{dy}$ des deux premiers termes de l'équation aux différences finies (a) . . . .

$$(4x^3 - 4a^2x)\frac{\Delta x}{\Delta y} - 6ay^2 - 6a^2y + (6x^2 - 2a^2)\frac{\Delta x^2}{\Delta y} -$$

$$(6ay + 3a^2)\Delta y + 4x\frac{\Delta x^3}{\Delta y} - 2a\Delta y^2 + \frac{\Delta x^4}{\Delta y} = o,$$

lesquels termes disparoissent lorsqu'on fait $x = o$ & $y = -a$. Il faut donc avoir recours aux termes suivants pour trouver dans ce cas-là le rapport $\frac{dx}{dy}$ qui sera donné par l'équation du second degré $(6x^2 - 2a^2)\frac{dx^2}{dy^2} - 6ay - 3a^2 = o$, de laquelle on tirera $\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{3}{2}$ & $\frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Donc du point où $x = o$ & $y = -a$, on peut mener deux tangentes en prenant l'une des sous-tangentes $(+a\sqrt{\frac{3}{2}})$ du même côté que l'origine des x, & l'autre $(-a\sqrt{\frac{3}{2}})$ du côté opposé. Il est clair qu'il doit passer par ce point deux branches de la courbe; c'est ce qu'on appelle un *point double*. On appelle *point triple* celui qui est commun à trois branches d'une courbe, *point quadruple* celui qui est commun à quatre branches, & ainsi de suite.

Je ferai une autre question relativement à la même courbe. N'a-t-elle que ce *point double?* N'a-t-elle pas de *point d'une multiplicité supérieure?* Pour la résoudre, j'ai recours à l'équation (a), dans laquelle je fais $4x^3 - 4a^2x = o$, $6ay^2 + 6a^2y = o$. La premiere de ces équations a trois racines $x = o$, $x = a$ & $x = -a$; la seconde en a deux $y = o$ & $y = -a$. On aura autant de points multiples qu'on trouvera de valeurs de x qui, avec les valeurs correspondantes de y, satisferont à l'équation de la courbe. Or il n'y a que $x = o$ & $y = -a$, $x = a$ & $y = o$ $x = -a$ & $y = o$ qui satisfassent à cette équation; la courbe n'a donc que trois points multiples, & ces trois points ne sont que doubles, puisque dans chaque supposition le rapport $\frac{dx}{dy}$ est donné par l'équation du second degré $(6x^2 - 2a^2)\frac{dx^2}{dy^2} - 6ay - 3a^2 = o$.

2. En général l'équation de la courbe étant (A) . . . .

$ax^{n} + bx^{n-1}y + \ldots\ldots + gy^{n} + a'x^{n-1} + b'x^{n-2}y + \&c. = 0,$ on pourra toujours repréſenter l'équation qui renferme le rapport entre les différences finies des co-ordonnées par (B) . . . . . . $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^{2} + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^{2} + F\Delta x^{3} + G\Delta x^{2}\Delta y + H\Delta x\Delta y^{2} + I\Delta y^{3} + K\Delta x^{4} + \&c. + a\Delta x^{n} + b\Delta x^{n-1}\Delta y + \ldots\ldots + g\Delta y^{n} = 0,$ où A, B, C, &c. ſont des fonctions algébriques des variables x, y, & a, $b \ldots . g$ les mêmes coefficients que dans l'équation (A). On tireroit de l'équation (B) $\frac{dx}{dy} = \frac{-B}{A}$, à moins qu'on ne demandât ce rapport entre les différentielles dx & dy pour un point où les valeurs de x & y rendiſſent A & B nuls en même temps. Alors on auroit recours aux trois termes ſuivants, & $\frac{dx}{dy}$ ſeroit donné par l'équation du ſecond degré $C\frac{dx^{2}}{dy^{2}} + D\frac{dx}{dy} + E = 0$; pourvu cependant que dans la même ſuppoſition C, D & E ne devinſſent pas nuls en même temps que A & B, dans lequel cas il faudroit avoir recours à l'équation du troiſieme degré $F\frac{dx^{3}}{dy^{3}} + G\frac{dx^{2}}{dy^{2}} + H\frac{dx}{dy} + I = 0$; & ainſi de ſuite.

Donc pour déterminer les points multiples de la courbe repréſentée par l'équation (A), il faudra faire $A = 0$, $B = 0$ dans l'équation (B); & on aura autant de points multiples qu'on trouvera de valeurs différentes de x, qui, avec les valeurs de y correſpondantes, ſatisferont à l'équation (A); on comprend dans les valeurs différentes celles qui étant égales different par le ſigne, & celles qui étant égales & de même ſigne répondent à des ordonnées différentes. Mais ne ſuppoſons qu'une valeur à x & une à y; ſi ces valeurs, tirées des équations $A = 0$, $B = 0$, ne ſatisfont qu'à l'équation (A), le point ſera double; il ſera triple ſi elles rendent nuls auſſi les coefficients C, D & E; quadruple ſi ces valeurs ſatisfont à l'équation (A), & rendent nuls les coefficients C, D, E, F, G, H, I; & ainſi de ſuite. Le degré de la multiplicité du point ſera le même que le degré de l'équation qui renfermera le rapport $\frac{dx}{dy}$. Cette équation pourroit avoir des racines égales; c'eſt ce qui

arrive lorſqu'au point multiple pluſieurs branches ſe touchent à la fois, on trouve autant de valeurs égales de $\frac{dx}{dy}$ qu'il y a de branches qui ſe touchent. La même équation pourroit avoir des racines imaginaires, & alors il y auroit autant de branches inviſibles que de racines imaginaires, lorſque les points où cela arrive ſont détachés du cours de la courbe, on les appelle des *points conjugués*.

Pour que la courbe repréſentée par l'équation (A) du degré n, ait un point d'une multiplicité n, il faudra que les coefficients C, D, E, &c. diſparoiſſent, & qu'il ne reſte plus de l'équation aux différences finies que $a\Delta x^{n} + b\Delta x^{n-1}\Delta y + \ldots\ldots + g\Delta y^{n} = 0$. Cette équation ſera celle de la courbe, en changeant convenablement l'origine des co-ordonnées; & comme pouvant toujours ſe décompoſer en facteurs du premier degré, elle ne repréſente que le ſyſtême d'un nombre n de lignes droites; il eſt clair que le point demandé ne peut appartenir à la courbe dont il s'agit, mais bien à un ſyſtême d'un nombre n de lignes droites qui ſe coupent en ce point. Il eſt par conſéquent démontré qu'une courbe du degré n ne peut avoir de point d'une multiplicité ſupérieure à $n - 1$.

3. Le rapport entre les différentielles dx & dy étant donné généralement par l'équation $A\,dx + B\,dy = 0$, il eſt poſſible que pour des valeurs particulieres de x & de y, les coefficients A & B ſoient nuls en même temps. On trouveroit quelle eſt alors la valeur de $\frac{dx}{dy}$ ſi l'on avoit l'équation en x & y pour en conclure celle entre les différences finies de ces variables; ou bien ſi ſans tout cela on pouvoit parvenir aux équations

$$(1)\ldots\ldots C\frac{dx^2}{dy^2} + D\frac{dx}{dy} + E = 0,\ (2)\ldots\ldots F\frac{dx^3}{dy^3} + G\frac{dx^2}{dy^2} + H\frac{dx}{dy} + I = 0, \text{ \&c.}$$

Or il ne ſera pas difficile de démontrer que, toutes réductions faites, l'équation (1) n'eſt que $A\,dx + B\,dy = 0$ différentiée en regardant dx & dy comme conſtants; que l'équation (2) n'eſt que $A\,dx + B\,dy = 0$ différentiée deux fois en regardant toujours dx & dy comme conſtants, & ainſi des autres. D'où il ſuit que ſi pour quelques valeurs particulières de x & de y, le rapport $\frac{dx}{dy}$ ne peut être donné par $A\,dx +$

$B\,dy = 0$, on différentiera cette équation en regardant dx & dy comme constants, & le rapport demandé sera renfermé dans une équation du second degré; si une premiere différentiation ne suffit pas, on différentiera une seconde fois, une troisieme fois, & toujours ainsi, en regardant dx & dy comme constants, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à une équation qui puisse donner le rapport demandé. L'exposant du degré de cette équation, diminué d'une unité, sera égal au nombre de fois que l'on aura différentié.

4. On a une fonction de x & de y qui devient $\frac{0}{0}$ dans certains cas particuliers, & l'on demande quelle est alors la valeur de cette fonction?

On peut toujours regarder une fonction quelconque de deux variables comme exprimant le rapport entre les différentielles de ces variables; ainsi ce problême se résout comme le précédent; ce qui s'accorde parfaitement avec ce que notre Auteur en a dit. Cependant, pour plus de clarté, nous ajouterons les deux exemples suivants à ceux qu'il a donnés.

On demande la valeur de la fraction $\frac{x - (m+1)\,x^{m+1} + m\,x^{m+2}}{(1-x)^2}$ dans le cas de $x = 1$? Nous la supposerons $= \frac{dy}{dx}$, & nous aurons l'équation $(x - (m+1)\,x^{m+1} + m\,x^{m+2})\,dx = (1-x)^2\,dy$ qui, étant différentiée en regardant dx & dy comme constants, donne $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - (m+1)^2\,x^m + m\,.\,\overline{m+2}\,.\,x^{m+1}}{-2\,(1-x)}$. Mais le second membre de celle-ci devenant $\frac{0}{0}$ dans le cas de $x = 1$, il faudra différentier une seconde fois, comme précédemment, & on en tirera $\frac{dy}{dx} = \frac{-m\,.\,\overline{m+1}^2\,.\,x^{m-1} + m\,.\,\overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\,.\,x^m}{2}$, dont le second membre devient $\frac{m\,.\,\overline{m+1}}{2}$ lorsqu'on fait $x = 1$, c'est la valeur de la fraction proposée dans la même hypothese.

Soit encore proposé de trouver la valeur de la fraction $\frac{e^x - e^{-x}}{log.\,\overline{1+x}}$ dans la supposition de $x = 0$. La différentielle du numérateur, divisée par dx, est $e^x + e^{-x}$, celle du nominateur est $\frac{1}{1+x}$; on a donc cette nou-

velle fraction $\frac{(e^{2x}+1)(1+x)}{e^x}$ qui devient $=2$, lorsqu'on fait $x=0$; c'est la valeur de la fraction proposée dans la même hypothese.

LEMME I.

Fig. 131. 166. *Soit une ligne courbe quelconque* BCG, *avec une ligne droite* AE *qui la touche au point* B, *& sur laquelle soient marqués à discrétion deux points fixes* A, E. *Si l'on fait rouler cette droite autour de la courbe, ensorte qu'elle la touche continuellement; il est clair que les points fixes* A, E *décriront dans ce mouvement deux courbes* AMD, ENH. *Si l'on mene à présent* DL *parallele à* AB, *& qui fasse par conséquent avec* DK *(sur laquelle je suppose la droite* AE *lorsqu'elle touche la courbe* BCG *en* G*) l'angle* KDL *égal à l'angle* AOD *fait par les tangentes en* B, G; *& que l'on décrive comme on voudra, du centre* D *l'arc* KFL:

Je dis que DK.KFL :: AE.AMD $\pm$ ENH; *savoir* + *lorsque le point touchant tombe toujours entre les points décrivants, & — lorsqu'il les laisse toujours du même côté.*

Car supposant que la droite AE en roulant autour de la courbe BCG soit parvenue dans les positions MCN, mCn infiniment proches l'une de l'autre, & menant les rayons DF, Df paralleles à CM, Cm; il est clair que les secteurs DFf, CMm, CNn seront semblables; & qu'ainsi $DF.Ff :: CM.Mm :: CN.Nn :: CM \pm CN$ ou $AE.Mm \pm Nn$. Or comme cela arrivera toujours en quelque endroit que se trouve le point touchant C, il s'ensuit que le rayon DK est à l'arc KFL somme de tous les petits arcs $Ff :: AE.AMD \pm ENH$ somme de tous les petits arcs $Mm \pm Nn$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. Il est visible que les courbes AMD, ENH sont formées par le développement de la même courbe BCG; & qu'ainsi la droite AE, est toujours perpendiculaire sur ces deux courbes dans toutes les positions où elle se rencontre;

contre : de ſorte que leur diſtance eſt par-tout la même ; ce qui eſt la proprieté des lignes paralleles. D'où l'on voit qu'une ligne courbe *AMD* étant donnée, on peut trouver une infinité de points de la courbe *ENH* ſans avoir beſoin de ſa développée *BCG*, en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à cette courbe, & les prenant toutes égales à la droite *AE*.

COROLLAIRE II.

168. Si la courbe *BCG* a ſes deux moitiés *BC*, *CG* entiérement ſemblables & égales, & que l'on prenne les droites *BA*, *GH* égales entre elles ; il eſt clair que les courbes *AMD*, *ENH* ſeront ſemblables & égales, enſorte qu'elles ne différeront que par leur poſition. D'où il ſuit que la courbe *AMD* ſera à l'arc de cercle $KFL :: \frac{1}{2} AE . DK$, c'eſt-à-dire en raiſon donnée.

PROPOSITION II.

Problême.

169. *Soient deux courbes quelconques* AEV, BCG, *avec une troiſieme* AMD *telle qu'ayant décrit par le développement de la courbe* BCG *une portion de la courbe* EM, *la relation des portions de courbes* AE, EM, *& des rayons de la développée* EC, MG *ſoit exprimée par une équation quelconque donnée. On propoſe de mener d'un point donné* M *ſur la courbe* AMD *la tangente* MT. FIG. 132.

Ayant imaginé une autre portion de courbe *em*, infiniment proche de *EM*, & les rayons de la développée *CeF*, *GmR* ; Soit 1°. *CH* perpendiculaire ſur *CE*, & qui rencontre en *H* la tangente *EH* de la courbe *AEV*. 2°. *ML* parallele à *CE*, & qui rencontre en *L* l'arc *GL* décrit du centre *M* & du rayon *MG*. 3°. *GT* perpendiculaire ſur *MG*, & qui rencontre en *T* la tangente cherchée *MT*.

On nommera enſuite les données *AE*, *x* ; *EM*, *y* ;

CE, u; GM, z; CH, s; EH, t; l'arc GL, r; d'où l'on aura $Ee = dx$, Fe ou $Rm = du = dz$; & les triangles rectangles semblables eFE, ECH donneront $CE\ (u)$. $CH\ (s) :: Fe\ (dz) . FE = \frac{sdz}{u}$. Et $CE\ (u) . EH\ (t) ::$
* Art. 166. $Fe\ (dz) . Ee\ (dx) = \frac{tdz}{u}$. Or par le Lemme * $RF - me = \frac{rdz}{z}$; & partant $RM(\overline{RF - me} + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}) = \frac{rdz}{z} + dy + \frac{sdz}{u}$. Donc à cause des triangles rectangles semblables mRM, MGT, l'on aura $mR(dz)$. $RM\left(\frac{rdz}{z} + \frac{sdz}{u} + dy\right) :: MG(z) . GT = r + \frac{sz}{u} + \frac{zdy}{dz}$. Mais si l'on met dans la différence de l'équation donnée à la place de du & dx leurs valeurs dz & $\frac{tdz}{u}$, l'on trouvera une valeur de dy en dz, laquelle étant substituée dans $\frac{zdy}{dz}$, il viendra pour la sous-tangente cherchée GT une valeur entiérement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

FIG. 133. Si l'on suppose que la courbe BCG se réunisse en un point O; il est visible que la portion de courbe $ME\ (y)$ se change en un arc de cercle égal à l'arc $GL\ (r)$, & que les rayons $CE\ (u)$, $GM\ (z)$ de la développée deviennent égaux entre eux : de sorte que GT, qui devient en ce cas OT, se trouvera $= y + s + \frac{zdy}{dz}$.

EXEMPLE.

FIG. 133. 170. Soit $y = \frac{xz}{a}$; les différences donneront $dy =$
* Art. 8. $\frac{zdx - xdz}{a}$ (on prend * $- xdz$ au lieu de $+ xdz$; parce-que x & y croissant, z diminue) $= \frac{tdz - xdz}{a}$, en mettant pour dx sa valeur $\frac{tdz}{z}$; & partant $OT\left(y + s + \frac{zdy}{dz}\right) =$

$y+s+\frac{tz-xz}{a}=\frac{as+tz}{a}$, en mettant pour $\frac{xz}{a}$ ſa valeur y.

REMARQUE.

171. Si le point O tombe ſur l'axe AB, & que la courbe AEV ſoit un demi-cercle; la courbe AMD ſera une demi-roulette, formée par la révolution d'un demi-cercle BSN autour d'un arc égal BGN d'un cercle décrit du centre O, & dont le point générateur A tombera dehors, dedans, ou ſur la circonférence du demi-cercle mobile BSN, ſelon que la donnée a ſera plus grande, moindre, ou égale à OV. Pour le prouver, & déterminer en même temps le point B. FIG. 134.

Je ſuppoſe ce qui eſt en queſtion, ſavoir que la courbe AMD eſt une demi-roulette, formée par la révolution du demi-cercle BSN, qui a pour centre le point K centre du demi-cercle AEV, autour de l'arc BGN décrit du centre O; & concevant que ce demi-cercle BSN s'arrête dans la ſituation BGN telle que le point décrivant A tombe ſur le point M, je mene par les centres des cercles générateurs la droite OK qui paſſe par conſéquent par le point touchant G; & tirant KSE, j'obſerve que les triangles OKE, OKM ſont égaux & ſemblables, puiſque leurs trois côtés ſont égaux chacun à chacun. D'où il ſuit 1°. Que les angles extrêmes MOK, EOK ſont égaux; & qu'ainſi les angles MOE, GOB le ſont auſſi : ce qui donne $GB.ME :: OB.OE$. 2°. Que les angles MKO, EKO ſont encore égaux; & qu'ainſi les arcs GN, BS, qui les meſurent, le ſont auſſi : la même choſe ſe doit dire de leurs compléments GB, SN, à deux droits; puiſqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Or, par la génération de la roulette, l'arc GB du cercle mobile eſt égal à l'arc GB de l'immobile. J'aurai donc $SN.ME :: OB.OE$. Cela poſé,

Je nomme les données OV, b; KV ou KA, c; & l'inconnue KB, u. J'ai $OB=b+c-u$; & les ſecteurs ſemblables KEA, KSN me donnent $KE\ (c).KS\ (u) :: AE\ (x).SN=\frac{ux}{c}$. Et partant $OB\ (b+c-u).OE\ (z)$

$: : SN\left(\frac{ux}{c}\right) . EM(y) = \frac{uxz}{bc+cc-cu} = \frac{xz}{a}$. D'où je tire $KB\ (u) = \frac{bc+cc}{a+c}$. Il eſt donc évident que ſi l'on prend $KB = \frac{bc+cc}{a+c}$, & qu'on décrive des centres K & O le demi-cercle BSN & l'arc BGN; la courbe AMD ſera une demi-roulette décrite par la révolution du demi-cercle BSN autour de l'arc BGN, & dont le point décrivant A tombe dehors, dedans, ou ſur la circonférence de ce cercle, ſelon que $KV\ (c)$ eſt plus grand, moindre, ou égal à KB $\left(\frac{bc+cc}{a+c}\right)$, c'eſt-à-dire ſelon que a eſt plus grand, moindre, ou égal à $OV\ (b)$.

COROLLAIRE I.

172. Il eſt clair que $EM\ (y) . AE\ (x) :: KB \times OE\ (uz) . OB \times KV\ (bc+cc-uc)$. Or ſi l'on ſuppoſe que OB devienne infinie; la droite OE le ſera auſſi, & deviendra parallele à OB, puiſqu'elle ne la rencontrera jamais; les arcs concentriques BGN, EM deviendront des droites paralleles entre elles, & perpendiculaires ſur OB, OE: & alors la droite EM ſera à l'arc $AE :: KB . KV$, parceque les droites infinies OE, OB ne différant entre elles que d'une grandeur finie, doivent être regardées comme égales.

COROLLAIRE II.

173. De ce que les angles MKO, EKO ſont égaux, il ſuit que les triangles MKG, EKB ſeront égaux & ſemblables; & qu'ainſi les droites MG, EB ſont égales entre elles. D'où l'on voit* que pour mener d'un point donné M ſur la roulette, la perpendiculaire MG, il n'y a qu'à décrire du centre O l'arc ME, & du centre M de l'intervalle EB un arc de cercle qui coupera la baſe BGN en un point G, par où & par le point donné M l'on tirera la perpendiculaire requiſe.

* Art. 43.

COROLLAIRE III.

174. Un point *G* étant donné ſur la circonférence du demi-cercle mobile *BGN*; ſi l'on veut trouver le point *M* de la roulette ſur lequel tombe le point décrivant *A* lorſque le point donné *G* touche la baſe, il ne faut que prendre l'arc *SN* égal à l'arc *BG*, & ayant tiré le rayon *KS* qui rencontre en *E* la circonférence *AEV*, décrire du centre *O* l'arc *EM*. Car il eſt évident que cet arc coupera la roulette au point cherché *M*.

PROPOSITION III.

Problême.

175. *Soit une demi-roulette* AMD *décrite par la révolution du demi-cercle* BGN *autour d'un arc égal* BGN *d'un autre cercle, enſorte que les parties révolues* BG, BG *ſoient toujours égales entre elles; ſoit le point décrivant* M *pris ſur le diametre* BN *dehors, dedans, ou ſur la circonférence mobile* BGN. *On demande le point* M *de la plus grande largeur de la demi-roulette par rapport à ſon axe* OA. FIG. 135. 136.

Suppoſant que le point *M* ſoit celui qu'on cherche, il eſt clair * que la tangente en *M* doit être parallele à l'axe *OA*; & qu'ainſi la perpendiculaire *MG* à la roulette, doit être auſſi perpendiculaire ſur l'axe qu'elle rencontre au point *P*. Cela poſé, ſi l'on mene *OK* par les centres des cercles générateurs, elle paſſera par le point touchant *G*; & ſi l'on tire *KL* perpendiculaire ſur *MG*, on formera les angles égaux *GKL*, *GOB*; & partant l'arc *IG* qui eſt le double de la meſure de l'angle *GKL* ſera à l'arc *GB* meſure de l'angle *GOB*, comme le diametre *BN* eſt au rayon *OB*. D'où il ſuit que pour déterminer ſur le demi-cercle *BGN* le point *G*, où il touche l'arc qui lui ſert de baſe lorſque le point décrivant *M* tombe ſur celui de la plus grande largeur; il faut couper le demi-cercle *BGN* en un point *G*, enſorte qu'ayant tiré par le point donné *M* la corde *IG*, l'arc *IG* ſoit à l'arc *BG* en raiſon donnée de *BN* à

* *Art.* 47.

OB. La queſtion ſe réduit donc à un problême de la géométrie commune qui ſe peut toujours réſoudre géométriquement lorſque la raiſon donnée eſt de nombre à nombre ; mais avec le ſecours des lignes dont l'équation eſt plus ou moins elevée, ſelon que la raiſon eſt plus ou moins compoſée.

Si l'on ſuppoſe que le rayon *OB* devienne infini, comme il arrive lorſque la baſe *BGN* devient une ligne droite ; il s'enſuit que l'arc *IG* ſera infiniment petit par rapport à l'arc *GB*. D'où l'on voit que la ſécante *MIG* devient alors la tangente *MT*, lorſque le point décrivant *M* tombe au-dehors du cercle mobile ; & qu'il ne peut y avoir de point de plus grande largeur lorſqu'il tombe au-dedans.

Lorſque le point *M* tombe ſur la circonférence en *N*, il ne faut que diviſer la demi-circonférence *BGN* en raiſon donnée de *BN* à *OB* au point *G*. Car le point *G* ainſi trouvé ſera celui où le cercle mobile *BGN* touche la baſe, lorſque le point décrivant tombe ſur le point cherché.

LEMME II.

FIG. 137. 176. *En tout triangle* BAC, *dont les angles* ABC, ACB ; & CAD *complément à deux droits de l'angle obtus* BAC, *ſont infiniment petits ; je dis que ces angles ont même rapport entre eux que les côtés* AC, AB, BC *auxquels ils ſont oppoſés.*

Car ſi l'on circonſcrit un cercle autour du triangle *BAC*, les arcs *AC*, *AB*, *BAC*, qui meſurent les doubles de ces an-
* Art. 3. gles, ſeront infiniment petits ; & ne différeront * point par conſéquent de leurs cordes ou ſoutendantes.

Si les côtés *AC*, *AB*, *BC* du triangle *BAC*, ne ſont pas infiniment petits, mais qu'ils aient une grandeur finie : il s'enſuit que le cercle circonſcrit doit être infiniment grand ; puiſque les arcs *AC*, *AB*, *BAC*, qui ont une grandeur finie, doivent être infiniment petits par rapport à ce cercle, étant les meſures d'angles infiniment petits.

PROPOSITION IV.

Problême.

177. *Les mêmes choses étant posées, il faut déterminer sur chaque perpendiculaire* MG, *le point* C *où elle touche la développée de la roulette.* Fig. 135. 136.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire mg infiniment proche de MG, & qui la coupe par conséquent au point cherché C, on tirera la droite Gm; & ayant pris sur la circonférence du cercle mobile le petit arc Gg égal à l'arc Gg de l'immobile, on menera les droites Mg, Ig, Kg, Og. Cela posé, si l'on regarde les petits arcs Gg, Gg comme de petites droites perpendiculaires sur les rayons Kg, Og; il est clair que le petit arc Gg du cercle mobile tombant sur l'arc Gg de l'immobile, le point décrivant M tombera sur m, ensorte que le triangle GMg se confondra avec le triangle Gmg. D'où l'on voit que l'angle MGm est égal à l'angle $gGg = GKg + GOg$; puisqu'ajoutant de part & d'autre les mêmes angles KGg, OGg, l'on en compose deux droits.

Or nommant les données OG, b; KG, a; GM ou Gm, m; GI ou Ig, n; l'on trouve 1°. $OG . GK :: GKg . GOg$. Et $OG(b) . OG + GK$ ou $OK(b+a) :: GKg . GKg + GOg$ ou $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$. 2°. * $Ig . MI :: GMg . MgI$. Et $Ig \pm MI$ ou $MG(m) . Ig(n) :: GMg \pm MgI$ ou GIg ou $\frac{1}{2} GKg . GMg$ ou $Gmg = \frac{n}{2m} GKg$. 3°. * L'angle MCm ou $MGm - Gmg$ $\left(\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m} GKg\right) . Gmg \left(\frac{n}{2m} GKg\right) :: Gm(m) . GC = \frac{bmn}{2am + 2bm - bn}$. Et par conséquent le rayon cherché MC de la développée sera $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$.

* Art. 176.

* Ibid.

Si l'on suppose que le rayon $OG(b)$ du cercle immobile

devienne infini, ſa circonférence deviendra une ligne droite; & en effaçant les termes $2amm$, $2am$, parcequ'ils ſont nuls par rapport aux autres $2bmm$, $2bm - bn$, l'on aura $MC = \frac{2mm}{2m - n}$.

COROLLAIRE I.

178. De ce que l'angle $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$, & de ce que les arcs des différents cercles ſont entre eux en raiſon compoſée des rayons & des angles qu'ils meſurent; il ſuit que $Gg . Mm :: KG \times GKg . MG \times \frac{a+b}{b} GKg$. Et par conſéquent auſſi que $KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$; ou (ce qui eſt la même choſe) que $KG \times Mm . MG \times Gg :: OK (a+b) . OG (b)$, qui eſt une raiſon conſtante. D'où l'on voit que la dimenſion de la portion AM de la demi-roulette AMD, dépend de la ſomme des $MG \times Gg$ dans l'arc GB; & c'eſt ce que M. *Paſchal* a démontré à l'égard des roulettes qui ont pour baſes des lignes droites.

M. *Varignon* eſt tombé dans cette même propriété par une voie très différente de celle-ci.

COROLLAIRE II.

FIG. 135. 179. Lorſque le point décrivant M tombe hors de la circonférence du cercle mobile, il arrive néceſſairement l'un des trois cas ſuivants. Car menant la tangente MT, le point touchant G tombera 1°. Sur l'arc TB, comme l'on a ſuppoſé dans la figure en faiſant le calcul; & alors $MC \left(\frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}\right)$ ſurpaſſera toujours $MG (m)$. 2°. Sur le point touchant T; & l'on aura pour lors $MC \left(\frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}\right) = m$, puiſque $IG (n)$ s'évanouit. 3°. Sur l'arc TN; & alors la valeur de $GI (n)$ devenant négative de poſitive qu'elle étoit, l'on aura $MC = \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm + bn}$: de ſorte que MC ſera moindre que

MG

$MG\ (m)$ & toujours poſitif. D'où il eſt évident que dans tous ces cas, la valeur du rayon MC de la développée eſt toujours poſitive.

COROLLAIRE III.

180. Lorſque le point décrivant M tombe au-dedans de la circonférence du cercle mobile, on a toujours $MC = \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$; & il peut arriver que bn ſurpaſſe $2am + 2bm$, & qu'ainſi la valeur du rayon MC de la développée ſoit négative : d'où l'on voit que lorſqu'elle ceſſe d'être poſitive pour devenir négative, comme il arrive* lorſque le point M devient un point d'inflexion, il faut néceſſairement alors que $bn = 2am + 2bm$; & partant que $MI \times MG\ (mn - mm) = \frac{2amm + bmm}{b}$. Or ſi l'on nomme la donnée KM, c; l'on aura par la propriété du cercle $MI \times MG \left(\frac{2amm + bmm}{b}\right) = BM \times MN\ (aa - cc)$, ce qui donne l'inconnue $MG\ (m) = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$. Donc ſi l'on décrit du point donné M comme centre, & de l'intervalle $MG = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ un cercle ; il coupera le cercle mobile en un point G, où il touchera le cercle immobile qui lui ſert de baſe, lorſque le point décrivant M tombera ſur le point d'inflexion F.

Fig. 136.

* Art. 81.

Si l'on mene MR perpendiculaire ſur BN; il eſt clair que cette $MG \left(\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}\right)$ ſera moindre que $MR\ (\sqrt{aa - cc})$, & qu'elle lui doit être égale lorſque b devient infinie, c'eſt-à-dire lorſque la baſe de la roulette devient une ligne droite.

Il eſt à remarquer, qu'afin que le cercle décrit du rayon MG coupe le cercle mobile, il faut que MG ſurpaſſe MN, c'eſt-à-dire que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ ſurpaſſe $a - c$; & qu'ainſi $KM\ (c)$

surpasse $\frac{aa}{a+b}$. D'où il est manifeste qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion dans la roulette *AMD*, il faut que *KM* soit moindre que *KN*, & plus grande que $\frac{aa}{a+b}$.

LEMME III.

Fig. 138. 181. *Soient deux triangles* ABb, CDd *qui aient chacun un de leurs côtés* Bb, Dd *infiniment petit par rapport aux autres : je dis que le triangle* ABb *est au triangle* CDd *en raison composée de l'angle* BAb *à l'angle* DCd, & *du quarré du côté* AB *ou* Ab *au quarré du côté* CD *ou* Cd.

Car si l'on décrit des centres *A*, *C*, & des intervalles *AB*, *CD*, les arcs de cercles *BE*, *DF*; il est clair * que les triangles *ABb*, *CDd* ne différeront point des secteurs de cercles *ABE*, *CDF*. Donc &c. * Art. 2.

Si les côtés *AB*, *CD* sont égaux, les triangles *ABb*, *CDd* seront entre eux comme leurs angles *BAb*, *DCd*.

PROPOSITION V.

Problême.

Fig. 135. 182. *Les mêmes choses étant toujours posées; on demande la quadrature de l'espace* MGBA, *renfermée par les perpendiculaires* MG, BA *à la roulette*, *par l'arc* GB, & *par la portion* AM *de la demi-roulette* AMD, *en supposant la quadrature du cercle.*

L'angle $GMg \left(\frac{n}{2m} GKg\right)$ est à l'angle $MGm \left(\frac{a+b}{b} GKg\right)$, comme * le petit triangle *MGg* qui a pour base l'arc *Gg* du cercle mobile, au petit triangle ou secteur *GMm*; & partant le secteur $GMm = \frac{2m}{n} MGg \times \frac{a+b}{b} = \frac{2a+2b}{b} MGg$ $+ \frac{2ap+2bp}{bn} MGg$ en nommant *MI*, *p*, & mettant pour *m* sa valeur $p+n$. Or * le petit triangle ou secteur *KGg* est au petit triangle *MGg* en raison composée du quarré

* Art. 181. (beside "comme *")

* Art. 181. (beside "sa valeur")

de KG au quarré de MG, & de l'angle GKg à l'angle GMg; c'est-à-dire :: $aa \times GKg \,.\, mm \times \frac{n}{2m} GKg$; & partant le petit triangle $MGg = \frac{mn}{2aa} KGg$. Mettant donc cette valeur à la place du triangle MGg dans $\frac{2ap+2bp}{bn} MGg$, l'on aura le secteur $GMm = \frac{2a+2b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times pm}{aab} KGg$. Mais à cause du cercle, $GM \times MI\,(pm) = BM \times MN\,(cc - aa)$, qui est une quantité constante, & qui demeure toujours la même en quelque endroit que se trouve le point décrivant M; & par conséquent $GMm + MGg$ ou mGg; c'est-à-dire le petit espace de la roulette $GMmg = \frac{2a+3b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGg$. Donc puisque $GMmg$ est la différence de l'espace de la roulette $MGBA$, & MGg celle de l'espace circulaire MGB, renfermé par les droites MG, MB, & par l'arc GB, & que de plus le petit secteur KGg est la différence du secteur KGB; il s'ensuit * que l'espace de la roulette $MGBA = \frac{2a+3b}{b} MGB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGB$. Ce qu'il falloit trouver. * *Art.* 96,

Lorsque le point décrivant M tombe hors la circonférence BGN du cercle mobile, & que le point touchant G tombe sur l'arc NT; il est visible * que les perpendiculaires MG, mg s'entrecoupent en un point C, & qu'on a pour lors $m = p - n$. D'où il suit que le petit secteur $GMm = -\frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{2ap+2bp}{bn} MGg = -\frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{amp+bmp}{aab} KGg$, en mettant comme auparavant pour le petit triangle MGg sa valeur $\frac{mn}{2aa} KGg$; & partant que $GMm - MGg$ ou mGg, c'est-à-dire $MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGg$, en mettant pour pm sa valeur $cc - aa$. FIG. 139. * *Art.* 180.

Or supposant que TH soit la position de la tangente TM du cercle mobile, lorsque son point T touche la base au point T; il est clair que $MCm - GCg = MGTH - mgTH$, c'est-à-dire la différence de l'espace $MGTH$, & que MGg est

* Art. 96. celle de MGT, de même que KGg celle de KGT. Donc* l'espace $MGTH = -\frac{2a-3b}{b}MGT + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGT$.
Mais, comme l'on vient de prouver, l'espace $HTBA = \frac{2a+3b}{b}MTB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab}KTB$. Et partant on aura toujours & dans tous les cas l'espace $MGBA(MGTH + HTBA)$ $= \frac{2a+3b}{b}\overline{MTB - MGT}$ ou $MGB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab}\overline{KGT + KTB}$ ou KGB.

Fig. 135. Donc l'espace entier $DNBA$ renfermé par les deux perpendiculaires à la roulette DN, BA, par l'arc de cercle BGN, & par la demi-roulette AMD, est $= \frac{2a+3b}{b} + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} \times KNGB$; puisque le secteur KGB & l'espace circulaire MGB deviennent chacun le demi-cercle $KNGB$, lorsque le point touchant G tombe au point N.

Fig. 136. Lorsque le point décrivant M tombe au-dedans du cercle mobile, il faut mettre $aa - cc$ à la place de $cc - aa$ dans les formules précédentes; parcequ'alors $BM \times MN = aa - cc$.

Si l'on fait $c = a$, l'on aura la quadrature des roulettes qui ont leur point décrivant sur la circonférence du cercle mobile; & si l'on suppose b infinie, l'on aura la quadrature de celles qui ont pour bases des lignes droites.

Autre solution.

Fig. 140. 183. On décrit du rayon OD l'arc DV, & des diametres AV, BN les demi-cercles AEV, BSN; & ayant décrit à discrétion du centre O l'arc EM renfermé entre le demi-cercle AEV & la demi-roulette AMD, l'on mene

l'appliquée EP. Il s'agit de trouver la quadrature de l'espace AEM compris entre les arcs AE, EM, & la portion AM de la demi-roulette AMD.

Pour cela, ſoit un autre arc em concentrique & infiniment proche de EM, une autre appliquée ep, une autre Oe qui rencontre l'arc ME prolongé (s'il eſt néceſſaire) au point F. Soient nommées les variables OE, z; VP, u; l'arc AE, x; & comme auparavant les conſtantes OB, b; KB ou KN, a; KV ou KA, c; l'on aura $Fe = dz$, $Pp = du$, $OP = a + b - c + u$, $\overline{PE}^2 = 2cu - uu$, l'arc EM * $= \frac{axz}{bc}$; & partant le rectangle fait de l'arc EM par la petite droite Fe, c'eſt-à-dire * le petit eſpace $EMme = \frac{axzdz}{bc}$. Or à cauſe du triangle rectangle OPE; $zz = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu$, dont la différence donne $zdz = adu + bdu$. Mettant donc cette valeur à la place de zdz dans $\frac{axzdz}{bc}$, l'on aura le petit eſpace $EMme = \frac{aaxdu + abxdu}{bc}$. * *Art.* 172. * *Art.* 2.

Maintenant ſi l'on décrit la demi-roulette AHT par la révolution du demi-cercle AEV ſur la droite VT perpendiculaire à VA, & qu'on prolonge les appliquées PE, pe juſqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points H, h : il eſt clair * que $EH \times Pp$, c'eſt-à-dire le petit eſpace $EHhe = xdu$; & qu'ainſi $EMme \left(\frac{aaxdu + abxdu}{bc}\right) . EHhe (xdu) :: aa + ab . bc$, qui eſt une raiſon conſtante. Or puiſque cela arrive toujours en quelque endroit que ſe trouve l'arc EM, il s'enſuit que la ſomme de tous les petits eſpaces $EMme$, c'eſt-à-dire l'eſpace AEM, eſt à la ſomme de tous les petits eſpaces $EHhe$, c'eſt-à-dire à l'eſpace $AEH :: aa + ab . bc$. Mais l'on a * la quadrature de l'eſpace AEH dépendamment de celle du cercle ; & partant auſſi celle de l'eſpace cherché AEM. * *Art.* 172. * *Art.* 99.

Ceci ſe peut auſſi démontrer ſans aucun calcul, comme

j'ai fait voir dans les Actes de Leypsic au mois d'Août de l'année 1695.

On peut encore trouver la quadrature de l'espace AEH sans avoir recours à l'article 99. Car si l'on acheve les rectangles PQ, pq, l'on aura Qq ou $HR . Pp$ ou $Rh :: EP . PA$ ou HQ, puisque* la tangente en H est parallele à la corde AE; & partant $HQ \times Qq = EP \times Pp$, c'est-à-dire que les petits espaces $HQqh$, $EPpe$ sont toujours égaux entre eux. D'où il suit que l'espace AHQ renfermé par les perpendiculaires AQ, QH, & par la portion AH de la demi-roulette AHT, est égal à l'espace APE renfermé par les perpendiculaires AP, PE, & par l'arc AE. L'espace AEH sera donc égal au rectangle PQ moins le double de l'espace circulaire APE; c'est-à-dire au rectangle fait de PE par KA plus ou moins le rectangle fait de KP par l'arc AE, selon que le point P tombe au dessous ou au-dessus du centre; & par conséquent l'espace cherché AEM $= \frac{aa+ab}{bc} \overline{PE \times KA} \pm \overline{KP \times AE}$.

* Art. 18.

COROLLAIRE I.

184. Lorsque le point P tombe en K le rectangle $KP \times AE$, s'évanouit, & le rectangle $PE \times KA$ devient égal au quarré de KA: d'où l'on voit que l'espace AEM est alors $= \frac{aac+abc}{b}$; & par conséquent il est quarrable absolument & indépendamment de la quadrature du cercle.

COROLLAIRE II.

285. Si l'on ajoute à l'espace AEM le secteur AKE, l'espace $AKEM$ renfermé par les rayons AK, KE, par l'arc EM, & par la portion AM de la demi-roulette AMD, se trouve (lorsque le point P tombe au-dessus du centre K) $= \frac{bcc+2aac+2a^2c-2aau-2abu}{2bc} AE + \frac{aa+ab}{b} PE \times KA$; & partant si l'on prend $VP (u) \frac{2aac+2abc+bcc}{2aa+2ab}$ (ce qui rend nulle

la valeur de $\frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc} AE$), l'on aura l'espace $AKEM = \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA$. D'où l'on voit que sa quadrature est encore indépendante de celle du cercle.

Il est visible qu'entre tous les espaces AEM & $AKEM$, il ne peut y avoir que les deux que l'on vient de marquer, dont la quadrature soit absolue.

AVERTISSEMENT.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes extérieures se doit aussi entendre des intérieures, c'est-à-dire de celles dont le cercle mobile roule au-dedans de l'immobile; en observant que les rayons KB (a), KV (c) *deviennent négatifs de positifs qu'ils étoient. C'est pourquoi il faudra changer dans les formules précédentes; les signes des termes où* a *&* c *se rencontrent avec une dimension impaire.*

REMARQUE.

186. Il y a certaines courbes qui paroissent avoir un point d'inflexion, & qui cependant n'en ont point; ce que je crois à propos d'expliquer par un exemple, car cela pourroit faire quelque difficulté.

Soit la courbe géométrique NDN, dont la nature est exprimée par l'équation $z = \frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$ ($AP = x$, $PN = z$), dans laquelle il est clair 1°. Que x étant égale à a; $PN(z)$ s'évanouit. 2°. Que x surpassant a, la valeur de z est positive; & qu'au contraire lorsqu'il est moindre, elle est négative. 3°. Que lorsque $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, la valeur de PN est infinie. D'où l'on voit que la courbe NDN passe de part & d'autre de son axe en le coupant en un point D tel que $AD = a$; & qu'elle a pour asymptote la perpendiculaire BG menée par le point B tel que $AB = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$. FIG. 141.

Si l'on décrit à présent une autre courbe EDF, ensorte

qu'ayant mené à discrétion la perpendiculaire MPN, le rectangle fait de l'appliquée PM par la constante AD, soit toujours égal à l'espace correspondant DPN; il est visible qu'en nommant PM, y; & prenant les différences, l'on aura $AD \times Rm (ady) = NPpn$ ou $NP \times Pp \left(\frac{xxdx - aadx}{\sqrt{2xx - aa}}\right)$; & partant $Rm(dy) . Pp$ ou $RM(dx) :: PN . AD$. D'où il suit que la courbe EDF touche l'asymptote BG prolongée de l'autre côté de B en un point E, & l'axe AP au point D; & qu'ainsi elle doit avoir un point d'inflexion en

* *Art.* 78. D. Cependant on trouve * $-\frac{x^3}{2aa}$ pour la valeur du rayon de sa développée, laquelle est toujours négative, & devient égale à $-\frac{1}{2}a$ lorsque le point M tombe en D: d'où l'on doit

* *Art.* 81. conclure * que la courbe qui passe par tous les points M est toujours convexe vers l'axe AP, & qu'elle n'a point de point d'inflexion en D. Comment donc accorder tout cela? En voici le dénouement.

Si l'on prend PM du même côté que PN, on formera une autre courbe GDH qui sera toute pareille à EDF, & qui en doit faire partie, puisque sa génération est la même. Cela étant ainsi, l'on doit penser que les parties qui composent la courbe entiere ne sont pas EDF, GDH comme l'on s'étoit imaginé, mais bien EDH, GDF qui se touchent au point D; car tout s'accorde parfaitement dans cette derniere supposition. Ceci se confirme encore par cet exemple.

Fig. 142. Soit la courbe DMG, qui ait pour équation $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ ($AP = x$, $PM = y$). Il suit de cette équation que la courbe entiere a deux parties EDH, GDF opposées l'une à l'autre comme l'hyperbole ordinaire, ensorte que leur distance DD ou $2AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

Fig. 143. Si l'on suppose que b s'évanouisse, la distance DD s'évanouira aussi; & partant les deux parties EDH, GDF se toucheront au point D: de sorte qu'on pourroit penser à présent

présent que cette courbe a un point d'inflexion ou de rebroussement en D, selon qu'on imagineroit que ses parties seroient EDF, GDH ou EDG, HDF. Mais l'on se détromperoit aisément, en cherchant le rayon de la développée ; car l'on trouveroit qu'il seroit toujours positif, & qu'il deviendroit égal à $\frac{1}{2}a$ dans le point D.

On peut remarquer en passant, que la quadrature de l'espace DPN dépend de celle de l'hyperbole : ou (ce qui revient au même) de la rectification de la parabole. FIG. 141.

NOTE VIII.

1. Soit une ligne courbe AMZ & deux ordonnées MP, NQ perpendiculaires à l'axe AC ; on tirera une corde MN, & on construira un rectangle $BAPL$ qui ait AP pour base, & dont la hauteur AB soit constante & prise pour l'unité. Nous avons démontré (Note 1, nº 6.) que l'espace $MPQN$, terminé par l'arc MN, est la différence de l'espace APM : or le rapport du trapeze $MPQN$ au rectangle $LPQK$, différence du rectangle $BAPL$, approchera d'autant plus du rapport de l'espace $MPQN$, différence de l'espace APM, au même rectangle $LPQK$, que le point N sera plus près du point M ; donc ces deux rapports ne feront qu'une seule & même chose lorsque le point N tombera sur le point M. Mais le trapeze est égal à $\frac{2y + \Delta y}{2}\Delta x$, & le rectangle à $1 . \Delta x$; on a donc $y + \frac{\Delta y}{2}$ pour le rapport entre ces deux quantités, & y pour ce que devient ce rapport lorsque la différence Δy devient nulle. Donc, en nommant E l'espace APM, on aura $\frac{dE}{dx} = y$ & $dE = y\,dx$; & il ne s'agira plus que de trouver la valeur de y en x, au moyen de l'équation de la courbe. FIG. 6, pl. A.

Il n'y a de section conique qui soit quarrable, c'est-à-dire où le rapport entre l'espace E & une des co-ordonnées puisse être donné par une équation algébrique, que la parabole dont l'équation est $y^2 = ax$. On a alors $dE = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$, & pour intégrale complette $E = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c$. Dans les applications particulieres, on déterminera la constante arbi-

traire en cherchant quelle eſt la valeur de x qui doit rendre E nul. Si c'eſt $x = b$, on aura $c = -\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$ & $E = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}})$; ſi c'eſt $x = 0$, on aura $c = 0$ & $E = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$, ou $E = \frac{2}{3} x y$.

Soit un demi-cercle & une demi-ellipſe decrits ſur l'axe a ; je nomme b l'autre axe de l'ellipſe, y l'ordonnée de cette courbe & y' l'ordonnée du cercle qui répondent à la même abciſſe x, E l'eſpace elliptique & E' Fig. 141. l'eſpace circulaire correſpondant ; on aura $y : y' :: b : a$, & par conſéquent $E : E' :: b : a$. Ainſi la quadrature de l'ellipſe dépend de celle du cercle qui elle-même dépend de la rectification de la circonférence.

L'hyperbole équilatere, rapportée aux aſymptotes, en prenant la premiere abciſſe pour l'unité, a pour équation $xy = 1$. On a donc $dE =$ Fig. 6, pl. A. $\frac{dx}{x}$, d'où l'on tire en général $E = log.\ x + log.\ c$; car $log.\ c$ peut repréſenter une conſtante quelconque, ou $E = log.\ cx$. On voit maintenant pour quelle raiſon on a donné le nom de logarithmes hyperboliques aux logarithmes dont on fait uſage dans le calcul différentiel & le calcul intégral.

De $dy = \frac{dx}{1+x}$, on tire $y = log.\ (1 + x)$, ſi $x = 0$ doit rendre y nul ; mais $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 +$ &c. ; donc $log.\ (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c. On démontrera de la même maniere que $log.\ (1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} -$ &c. ; donc $log.\ (1 + x) - log.\ (1 - x)$ ou $log.\ \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{\&c.}\right)$, ſuite qui ſera très convergente lorſqu'on prendra pour x une fraction moindre que l'unité, & qui ſervira à trouver le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque d'une maniere très approchée.

L'hyperbole conſidérée par rapport à ſes axes, a pour équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax + x^2)$; on a donc dans ce cas $dE = \frac{b}{a} dx \sqrt{ax + x^2}$. Mais la différentielle de $\frac{2x + a}{4} \sqrt{ax + x^2} = \frac{ax\,dx + x^2\,dx}{\sqrt{ax + x^2}} + \frac{a^2\,dx}{8\sqrt{ax + x^2}}$;

donc $\frac{a x d x + x^2 d x}{\sqrt{a x + x^2}}$ ou $d x \sqrt{a x + x^2} = d . \frac{2 x + a}{4} \sqrt{a x + x^2} - \frac{a^2 d x}{8 \sqrt{a x + x^2}}$ Tout se réduit donc à intégrer $\frac{d x}{\sqrt{a x + x^2}}$. Pour cela je fais $a x + x^2 = x^2 z^2$, d'où je tire $x = \frac{a}{z^2 - 1}$, $dx = \frac{-2 a z d z}{(z^2 - 1)^2}$ & $\frac{d x}{\sqrt{a x + x^2}} = \frac{-2 d z}{z^2 - 1} = \frac{d z}{z + 1} - \frac{d z}{z - 1}$, qui a pour intégrale complette $log. \frac{c (z + 1)}{z - 1}$, ou $log. \frac{c(\sqrt{a x + x^2} + x)}{\sqrt{a x + x^2} - x}$. Donc $E =$ $\frac{b}{a}\left[\frac{2 x + a}{4} \sqrt{ax + x^2} - \frac{a^2}{8} log \frac{c(\sqrt{a x + x^2} + x)}{\sqrt{a x + x^2} - x}\right]$, ou c est la constante arbitraire ajoutée en intégrant.

2. Si l'on nomme s l'arc AM, on aura (Note 2, n°. 1) $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, formule pour rectifier les lignes courbes. Soit cette ligne courbe une parabole qui ait pour équation $y^2 = a x$; à cause de $d y = \frac{a d x}{2 \sqrt{a x}}$, on aura $d s = \frac{d x \sqrt{4 x + a}}{2 \sqrt{x}}$. Si j'avois éliminé x, j'aurois trouvé $d s = \frac{d y}{a} \sqrt{a^2 + 4 y^2}$. Je remarque que $d . y \sqrt{a^2 + 4y^2} = \frac{a^2 dy + 8y^2 dy}{\sqrt{a^2 + 4y^2}}$, d'où je tire $\frac{a^2 d y + 4y^2 d y}{\sqrt{a^2 + 4 y^2}}$ ou $dy \sqrt{a^2 + 4y^2} = \frac{1}{2} d . y \sqrt{a^2 + 4 y^2} + \frac{a^2 dy}{2\sqrt{a^2 + 4y^2}}$. On intégreroit le second terme du second membre comme dans l'exemple précédent; mais (Note 2, n°. 4) $\frac{d x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ayant pour intégrale $log. (x + \sqrt{a^2 + x^2})$ il est clair que $\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 + 4 y^2}} = \frac{1}{2} log. (2 y + \sqrt{a^2 + 4y^2})$. Donc $s = \frac{y\sqrt{a^2 + 4y^2}}{2 a} + \frac{a}{4} log. (2 y + \sqrt{a^2 + 4 y^2}) + c$. Si au lieu de la constante arbitraire c, j'eusse pris

$-\frac{a}{4}$ *log.* c, ce qui m'étoit bien permis, j'aurois trouvé

$s = \frac{y\sqrt{a^2+4y^2}}{2a} + \frac{a}{4}$ *log.* $\frac{2y+\sqrt{a^2+4y^2}}{c}$. Donc la rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole ou des logarithmes.

Le rayon des tables étant pris pour l'unité, $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ (Note 2, n°. 2) est la différentielle de l'arc qui a pour sinus y; donc en nommant s cet arc, on aura $s = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$. Mais $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} =$ $1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1 \cdot 3 y^4}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 y^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 y^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} +$ &c.; on a donc $s = y + \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 y^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 y^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} +$ &c., si $y = 0$ doit donner $s = 0$. Pour trouver l'arc de $30°$, on fera $y = \frac{1}{2}$, & on aura pour la valeur de cet arc

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2^6 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^{10} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} +$ &c., série extrêmement convergente, & dont la somme des dix premiers termes $= 0{,}52359877$. En multipliant ce nombre par 12, on trouve la circonférence $= 6{,}28318524$; expression qui ne s'éloigne de la vraie qu'à la septieme décimale.

3. De la formule $Y = y + q\frac{dy}{dx} +$ &c., démontrée (Note 3, n°. 2) il suit que si l'on nomme K la valeur de y qui répond à $x = 0$, & A, B, C, D, E, &c. ce que deviennent les quantités $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^5y}{dx^5}$, &c., lorsqu'on fait $x = 0$ & $y = K$, on doit avoir $y = K + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2 \cdot 3} + \frac{Dx^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{Ex^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} +$ &c.

Nous ferons usage de ce théorême pour développer *sin.* $x = y$. A cause que $x = 0$ doit donner $y = 0$, on a $K = 0$; on trouvera ensuite $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 0$, $E = 1$, &c.; d'où l'on tirera *sin.* $x = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} +$ &c. On

développera de la même maniere $cof.\ x = y$. Alors $x = 0$ donne $y = 1$; on a donc $K = 1$, & $A = 0$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 0$, &c, &c.; d'où l'on tire $cof.\ x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} +$ &c. Mais comme il fuffit de connoître les finus & cofinus des angles jufqu'à 45°, x ne fera jamais plus grand que la huitieme partie de la circonférence, & par conféquent la valeur numérique de cet arc fera toujours moindre que l'unité. D'où il fuit que les deux féries qui font les valeurs de *fin.* x & de *cof.* x, ne pourront jamais être que très convergentes; nous avons prouvé la même chofe de la férie qui fert à trouver le logarithme hyperbolique d'un nombre quelconque. Nous ferons à ce fujet une remarque importante; c'eft que tout problême qui n'eft fufceptible que d'approximation, & qu'on peut faire dépendre des logarithmes ou des arcs de cercle, eft réfolu de façon à ne rien laiffer à defirer; car non feulement l'approximation eft très confidérable, mais elle fe trouve toute calculée par les tables de logarithmes & de finus qu'on a entre les mains.

4. Reprenons la ligne courbe *AMZ*, & fuppofons que toute la figure faffe une révolution entiere fur l'axe *AC*. Nous nommerons *S* la furface décrite par l'arc *AM* (*s*), laquelle furface a pour différence la zone décrite par l'arc *MN*. Mais la furface décrite par la corde *MN* étant égale à $\frac{\varpi}{2}(2y + \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, & celle décrite par la ligne *LK* égale à $\pi \Delta x$, on a pour le rapport entre ces deux furfaces $\frac{2y+\Delta y}{2}\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$, & $y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ pour ce qu'il devient lorfque les différences Δx & Δy deviennent nulles: & comme ce même rapport approchera d'autant plus d'être égal à $\frac{\Delta S}{\varpi \Delta x}$ que le point *N* fera plus près du point *M*; il s'enfuit que $\frac{dS}{\varpi dx} = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, ou que $dS = \pi y ds$, c'eft la formule dont on fait ufage pour trouver la furface de tout folide de révolution. Fig. 6, pl. A.

Pour trouver la ſurface d'un paraboloïde dont le parametre $= a$, on a (n°. 2) $dS = \frac{\varpi dx}{2} \sqrt{4ax + a^2}$, dont l'intégrale complette eſt $S = \frac{\varpi}{12a}(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} + c$; & ſi l'on veut cette ſurface à compter du ſommet A, on trouvera qu'elle eſt égale à $\frac{\varpi}{12a}(4ax + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\varpi a^2}{12}$.

5. Nommons Σ le ſolide engendré par l'eſpace APM dans ſa révolution ſur l'axe AC, lequel a pour différence le ſolide engendré par l'eſpace $MPQN$ terminé par l'arc MN. Cela poſé, le cône tronqué engendré par le trapeze $MPQN$ eſt égal à $\frac{\varpi}{3} \cdot \frac{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}{2} \Delta x$, & le cylindre engendré par le rectangle $LPQK$ égal à $\frac{\varpi \Delta x}{2}$; on a donc pour le rapport entre ces deux ſolides $\frac{3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2}{3}$, & y^2 pour ce qu'il devient lorſque les différences Δx & Δy deviennent nulles. Mais ce même rapport approchera d'autant plus d'être égal à $\frac{\Delta \Sigma}{\frac{\varpi}{2}\Delta x}$ que le point N ſera plus près du point M; donc $\frac{d\Sigma}{\frac{\varpi}{2}dx} = y^2$, d'où l'on tire $d\Sigma = \frac{\varpi}{2}y^2 dx$, formule propre à trouver la ſolidité de tout ſolide de révolution.

Si le ſolide a été formé par la révolution d'un eſpace elliptique ou hyperbolique autour de l'axe a; à cauſe de $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax \mp x^2)$, on a $d\Sigma = \frac{\varpi b^2}{2a^2}(ax\,dx \mp x^2\,dx)$, & $\Sigma = \frac{\varpi b^2}{12a^2}(3ax^2 \mp 2x^3) + c$.

Généralement tous les problêmes relatifs à la quadrature & la rectification des lignes courbes, à la meſure des ſurfaces & des ſolidités des ſolides de révolution, lorſque la nature de la courbe eſt telle qu'on peut avoir l'une des co-ordonnées en fonction de l'autre, ſe réduiſent à l'intégration d'une formule différentielle $X\,dx$, dans laquelle x eſt une fonction quelconque de la ſeule variable x & de conſtantes. Cette intégration eſt la premiere choſe dont on s'occupe dans le calcul intégral.

6. Nous avons eu pour objet principal, dans les applications que nous avons faites du calcul différentiel, de déterminer les propriétés de lignes courbes dont on connoiſſoit la nature. Réciproquement on pourroit demander de trouver l'équation d'une ligne courbe dont on auroit une des propriétés; comme, par exemple, de déterminer la nature de la courbe qui a ſes ſous-tangentes égales entre elles. Cette propriété s'exprime en écrivant $\frac{ydx}{dy}$ = conſtante, & tout eſt réduit à l'intégration de l'équation différentielle $ydx = ady$, qui devient $dx = \frac{ady}{y}$, & donne $x = a\,log.y + log.b$, ou $x = log.by^a$. Nous avons réſolu une queſtion ſemblable dans une addition à l'article 42. Mais comme nous ne devons pas nous éloigner de ce qui eſt abſolument néceſſaire pour l'intelligence de notre Auteur, nous nous contenterons de faire remarquer qu'il ſera toujours facile de mettre en équation tous les problêmes de ce genre; & pour l'intégration des équations différentielles, nous renverrons aux Traités de calcul intégral.



SECTION X.

Nouvelle maniere de se servir du calcul des différences dans les courbes géométriques d'où l'on déduit la Méthode de MM. Descartes & Hudde.

DÉFINITION I.

Fig. 144. 145. 146. SOIT une ligne courbe *ADB* telle que les paralleles *KMN* à son diametre *AB*, la rencontrent en deux points *M*, *N*; & soit entendue la partie interceptée *MN* ou *PQ* devenir infiniment petite. Elle sera nommée alors la *Différence* de la coupée *AP*, ou *KM*.

COROLLAIRE I.

187. Lorsque la partie *MN* ou *PQ* devient infiniment petite; il est clair que les coupées *AP*, *AQ*, deviennent égales chacune à *AE*, & que les points *M*, *N* se reunissent en un point *D*: ensorte que l'appliquée *ED* est la plus grande ou la moindre de toutes ses semblables *PM*, *NQ*.

COROLLAIRE II.

188. Il est clair qu'entre toutes les coupées *AP*, il n'y a que *AE* qui ait une différence; parcequ'il n'y a qu'en ce cas où *PQ* devienne infiniment petite.

COROLLAIRE. III.

189. Si l'on nomme les indéterminées *AP* ou *KM*, x; *PM* ou *AK*, y; il est évident que *AK* (y) demeurant la même, il doit y avoir deux valeurs différentes de x, savoir *KM*, *KN* ou *AP*, *AQ*. C'est pourquoi il faut que l'équation qui exprime la nature de la courbe *ADB* soit délivrée d'incommensurables, afin que la même inconnue x qui en marque les racines (car on regarde y comme connue) puisse avoir différentes valeurs. Ce qu'il faut observer dans la suite.

PROPOSITION

PROPOSITION I.

Problême.

190. *La nature de la courbe géométrique* ADB *étant donnée ; déterminer la plus grande ou la moindre de ses appliquées* ED.

Si l'on prend la différence de l'équation qui exprime la nature de la courbe, en traitant y comme constante, & x comme variable ; il est clair * qu'on formera une nouvelle équation qui aura pour une de ses racines x, une valeur AE, telle que l'appliquée ED sera la plus grande ou la moindre de toutes ses semblables. * *Art.* 181.

Soit, par exemple, $x^3 + y^3 = axy$, dont la différence, en traitant x comme variable, & y comme constante, donne $3xxdx = aydx$; & partant $y = \frac{3xx}{a}$. Si l'on substitue cette valeur à la place de y dans l'équation à la courbe $x^3 + y^3 = axy$; l'on aura pour x une valeur $AE = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}$, telle que l'appliquée ED sera la plus grande de toutes ses semblables, de même qu'on l'a déja trouvé art. 48.

Il est évident que l'on détermine de même non seulement les points D, lorsque les appliquées ED sont perpendiculaires ou tangentes de la courbe ADB ; mais aussi lorsqu'elles sont obliques sur la courbe, c'est-à-dire lorsque les points D sont des points de rebroussement de la premiere ou seconde sorte. D'où l'on voit que cette nouvelle maniere de considérer les différences dans les courbes géométriques est plus simple & moins embarrassante en quelques rencontres, que la * premiere. * *Sect.* 5.

REMARQUE.

191. On peut remarquer dans les courbes rebroussantes, que les PM paralleles à AK, les rencontrent en deux points M, O, de même que les KM paralleles à AP, font en FIG. 146.

M, *N* : de ſorte que *AP* (x) demeurant la même, y a deux différentes valeurs *PM*, *PO*. C'eſt pourquoi l'on peut traiter x comme conſtante, & y comme variable, en prenant la différence de l'équation qui exprime la nature de cette courbe. D'où l'on voit que ſi l'on traite x & y comme variables, en prenant cette différence, il faudra que tous les termes qui multiplient dx d'une part, & tous ceux qui multiplient dy d'une autre part, ſoient égaux à zéro. Mais il faut bien prendre garde que dx & dy marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3.) la différence de deux appliquées infiniment proches.

* Art. 181.

COROLLAIRE.

192. Si après avoir ordonné l'équation qui exprime la nature de la courbe dans laquelle il n'y a que l'inconnue x de variable, l'on en prend la différence ; il eſt clair 1°. Qu'on ne fait autre choſe que de multiplier chaque terme par l'expoſant de la puiſſance de x & par la différence dx, & le diviſer enſuite par x. 2°. Que cette diviſion par x, auſſi-bien que la multiplication par dx, peut être négligée, parcequ'elle eſt la même dans tous les termes. 3°. Que les expoſants des puiſſances de x font une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt l'expoſant de ſa plus grande puiſſance, & le dernier eſt zéro ; car on ſuppoſe qu'on ait marqué par une étoile les termes qui peuvent manquer dans l'équation.

Soit, par exemple, $x^3 * - ayx + y^3 = o$. Si l'on multiplie chaque terme par ceux de la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, 0 ; l'on formera l'équation nouvelle $3x^3 - ayx = o$.

* Sect. 5.

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & * & -\ ayx & +\ y^3 & = o. \\ 3, & 2, & 1, & o. & \\ \hline 3x^3 & * & -\ ayx & * & = o. \end{array}$$

Fig. 146.

D'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$, de même que l'on auroit trouvé en prenant la différence à la maniere accoutumée.

Cela ſuppoſé, je dis qu'au lieu de la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, 0, l'on peut ſe ſervir de telle autre progreſſion arithmétique qu'on voudra : $m+3$, $m+2$, $m+1$, $m+0$, ou m (l'on déſigne par m un nombre quelconque entier, ou rompu, poſitif, ou négatif). Car multipliant $x^3 * - ayx + y^3 = o$ par x^m, l'on aura $x^{m+3} *$, &c. $= o$, dont les termes doivent être multipliés par ceux de la progreſſion $m+3$, $m+2$, $m+1$, m chacun par ſon correſpondant pour en avoir la différence.

$$\begin{array}{llll} x^{m+3} \quad * & -ayx^{m+1} & +y^3x^m & = o. \\ m+3, \quad m+2, & m+1, & m. & \\ \hline \overline{m+3}\,x^{m+3} \quad * & -\overline{m+1}\,ayx^{m+1} & +my^3x^m & = o. \end{array}$$

Ce qui donnera $\overline{m+3}\,x^{m+3} - \overline{m+1}\,ayx^{m+1} + my^3x^m = o$; & en diviſant par x^m, il viendra $\overline{m+3}\,x^3 - \overline{m+1}\,ayx + my^3 = o$, comme l'on auroit trouvé d'abord en multipliant ſimplement l'égalité propoſée par la progreſſion $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

Si $m = -3$, la progreſſion ſera 0, -1, -2, -3; & l'équation ſera $2ayx - 3y^3 = o$. Si $m = -1$, la progreſſion ſera 2, 1, 0, -1; & l'équation $2x^3 - y^3 = o$.

On peut changer de ſignes tous les termes de la progreſſion, c'eſt-à-dire qu'au lieu de 0, -1, -2, -3, & 2, 1, 0, -1, l'on peut prendre 0, 1, 2, 3, & -2, -1, 0, 1; parcequ'on ne fait par-là que changer de ſignes tous les termes de la nouvelle équation qui doit être égalée à zéro. Et en effet, au lieu de $2ayx - 3y^3 = o$, $2x^3 - y^3 = o$, l'on auroit $-2ayx + 3y^3 = o$, $-2x^3 + y^3 = o$; ce qui eſt la même choſe.

Or il eſt viſible que ce que l'on vient de démontrer à l'égard de cet exemple, s'appliquera de la même maniere à tous les autres. D'où il ſuit que ſi après avoir ordonné une équation qui doit avoir deux racines égales entre elles, l'on en multiplie les termes par ceux d'une progreſſion arithmétique arbitraire, l'on formera une nouvelle équation qui ren-

fermera entre ſes racines une des deux égales de la premiere. Par la même raiſon, ſi cette nouvelle équation doit avoir encore deux racines égales, & qu'on la multiplie par une progreſſion arithmétique, l'on en formera une troiſieme qui aura entre ſes racines une des deux égales de la ſeconde; & ainſi de ſuite. De ſorte que ſi l'on multiplie une équation qui doit avoir trois racines égales, par le produit de deux progreſſions arithmétiques, l'on en formera une nouvelle qui aura entre ſes racines une des trois égales de la premiere; & de même ſi l'équation doit avoir quatre racines égales, il la faudra multiplier par le produit de trois progreſſions arithmétiques; ſi cinq, par le produit de quatre, &c.

C'eſt là préciſément en quoi conſiſte la Méthode de M. *Hudde*.

PROPOSITION II.

Problême.

FIG. 147. 193. *D'un point donné* T *ſur le diametre* AB, *ou du point donné* H *ſur* AH *parallele aux appliquées, mener la tangente* THM.

Ayant mené par le point touchant M l'appliquée MP, & nommé AT, s; AH, t; dont l'une ou l'autre eſt donnée; & les inconnues AP, x; PM, y; les triangles ſemblables TAH, TPM donneront $y = \frac{st + tx}{s}$, $x = \frac{sy - st}{t}$; & mettant ces valeurs à la place de y ou de x dans l'équation donnée, qui exprime la nature de la courbe AMD, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne ſe rencontrera plus.

Si l'on mene à préſent une ligne droite TD qui coupe la droite AH en G & la courbe AMD en deux points N, D, deſquels l'on abbaiſſe les appliquées NQ, DB; il eſt évident que t exprimant AG dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB, ou NQ, DB, leſquelles deviennent égales entre elles, ſavoir à la cherchée AP ou PM lorſque t exprime AH, c'eſt-à-dire lorſque la ſécante TDN

devient la tangente TM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par une progression arithmétique arbitraire ; ce que l'on réitérera, s'il est nécessaire, en multipliant de nouveau cette même équation par une autre progression arithmétique quelconque, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on en puisse trouver une qui ne renferme que l'inconnue x ou y, avec la donnée s ou t. L'exemple qui suit, éclaircira suffisamment cette Méthode.

EXEMPLE.

194. Soit $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD. Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, l'on aura tyy, &c. qui doit avoir deux racines égales.

$$\begin{array}{l} tyy - asy + ast = 0. \\ \ \ 1, \quad\ \ 0, - 1. \\ \hline tyy \quad\ * \ - ast = 0. \end{array}$$

C'est pourquoi multipliant par ordre ces termes par ceux de la progression arithmétique 1, 0, — 1, l'on trouvera $as = yy = ax$; & partant $AP\ (x) = s$. D'ou l'on voit qu'en prenant $AP = AT$; & menant l'appliquée PM, la ligne TM sera tangente en M. Mais si au lieu de $AT\ (s)$, c'est $AH\ (t)$ qui est donnée ; l'on multipliera la même équation tyy, &c. par cette autre progression 0, 1, 2, & l'on aura la cherchée $PM\ (y) = 2t$.

On auroit trouvé la même construction en mettant pour y sa valeur $\frac{st + tx}{s}$ dans $ax = yy$. Car il vient $ttxx$, &c. dont les termes multipliés par 1, o, — 1, donnent $xx = ss$; & par conséquent $AP\ (x) = s$.

COROLLAIRE.

195. Si l'on veut à présent que le point touchant M soit donné, & qu'il faille trouver le point T ou H, dans lequel

la tangente MT rencontre le diametre AB ou la parallele AH aux appliquées ; il n'y a qu'à regarder dans la derniere équation, qui exprime la valeur de l'inconnue x ou y par rapport à la donnée s ou t, cette derniere comme l'inconnue, & x ou y comme connue.

PROPOSITION III.

Problême.

FIG. 148. 196. *La nature de la courbe géométrique* AFD *étant donnée; déterminer ſon point d'inflexion* F.

Ayant mené par le point cherché F l'appliquée FE avec la tangente FL, par le point A (origine des x) la parallele AK aux appliquées, & nommé les inconnues LA, s ; AK, t ; AE, x ; EF, y ; les triangles ſemblables LAK, LEF donneront encore $y = \frac{st + tx}{s}$, & $x = \frac{sy - st}{t}$; de ſorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne ſe rencontrera plus, de même que dans la propoſition précédente.

Si l'on mene à préſent une ligne droite TD qui coupe la droite AK en H, qui touche la courbe AFD en M, & la coupe en D, d'où l'on abaiſſe les appliquées MP, DB : il eſt évident 1°. Que s exprimant AT ; & t, AH ; l'équation que l'on vient de trouver, doit avoir deux racines égales, ſavoir* chacune à AP ou à PM ſelon qu'on a fait évanouir y ou x, & une autre AB ou BD. 2°. Que s exprimant AL ; & t, AK ; le point touchant M ſe réunit avec le point d'interſection D dans le point cherché F : puiſque* la tangente LF doit toucher & couper la courbe dans le point d'inflexion F ; & qu'ainſi les valeurs AP, AB de x ou PM, BD de y deviennent égales entre elles, ſavoir l'une & l'autre à la cherchée AE ou EF. D'où il ſuit que cette équation doit avoir trois racines égales. C'eſt pourquoi on la multipliera par le produit de deux progreſſions arithmétiques arbitraires ; ce que l'on réitérera, s'il eſt néceſſaire, en la mul-

* Art. 193.

* Art. 67.

tipliant de même par un autre produit de deux progreſſions arithmétiques quelconques, afin que par la comparaiſon des équations qui en réſultent, l'on puiſſe faire évanouir les inconnues s & t.

EXEMPLE.

197. Soit $ayy = xyy + aax$ l'équation qui exprime la nature de la courbe *AFD*. Si l'on met à la place de x ſa valeur $\frac{sy - st}{t}$, on formera l'équation $sy^3 - styy - atyy$, &c.

$$sy^3 - styy + aasy - aast = 0.$$
$$- at$$
$$1, \quad 0, \quad -1, \quad -2.$$
$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0.$$
$$\overline{3sy^3 \quad * \quad - aasy \quad * \quad = 0.}$$

qui étant multipliée par 3, 0, — 1, 0, produit des deux progreſſions arithmétiques 1, 0, — 1, — 2, & 3, 2, 1, 0, donne $yy = \frac{1}{3}aa$; & mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, l'on trouve l'inconnue $AE\ (x) = \frac{1}{4}a$. Ce qui revient à l'art 68.

AUTRE SOLUTION.

198. On peut encore réſoudre ce Problême en remarquant que du même point L ou K on ne peut mener qu'une ſeule tangente LF ou KF; parcequ'elle touche en dehors la partie concave AF, & en dedans le convexe FD; au lieu que de tout autre point T ou H, pris ſur AL ou AK entre A & L ou A & K, l'on peut mener deux tangentes TM, TD ou HM, HD, l'une de la partie concave & l'autre de la convexe : de ſorte qu'on peut conſidérer le point d'inflexion F comme la réunion des deux points touchans M & D. Si donc l'on ſuppoſe que $AT\ (s)$ ou $AH\ (t)$ ſoit donnée, & qu'on cherche * la valeur de x ou y par rapport à s ou t; FIG. 149. 150. * Art. 194.

l'on aura une équation qui aura deux racines AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales chacune à la cherchée AE ou EF, lorsque s exprime AL & t, AK. C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique arbitraire, &c.

EXEMPLE.

199. Soit comme ci-dessus, $ayy = xyy + aax$; l'on aura encore $sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = 0$, qui étant multipliée par la progression arithmétique 1, 0, — 1, — 2, donne $y^3 * - aay - 2aat = 0$, dans laquelle s ne se rencontre plus, & qui a deux racines inégales, savoir PM, BD, lorsque t exprime AH, & deux égales chacune à la cherchée EF lorsque t exprime AK. C'est pourquoi multipliant de nouveau cette derniere équation par la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, l'on aura $3yy - aa = 0$; & partant EF $(y) = \sqrt{\frac{1}{3} aa}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Problême.

FIG. 151. 200. *Mener d'un point donné* C *hors d'une ligne courbe* AMD *une perpendiculaire* CM *à cette courbe.*

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur le diametre AB, & décrit du centre C de l'intervalle CM un cercle; il est clair qu'il touchera la courbe AMD au point M. Nommant ensuite les inconnues AP, x; PM, y; CM, r; & les connues AK, s; KC, t; l'on aura PK ou $CE = s - x$, $ME = y + t$; & à cause du triangle rectangle MEC, $y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx}$, $x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus.

Si l'on décrit à présent du même centre C un autre cercle qui coupe la courbe en deux points N, D, d'où l'on abaisse

abaisse les perpendiculaires NQ, DB, il est évident que r exprimant le rayon CN ou CD dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB ou NQ, DB qui deviennent égales entre elles, savoir à la cherchée AP ou PM lorsque r exprime le rayon CM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera, &c.

EXEMPLE.

201. Soit $ax=yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, dans laquelle mettant pour x sa valeur $s-\sqrt{rr-tt-2ty-yy}$, l'on aura $as-yy=a\sqrt{rr-tt-2ty-yy}$: de sorte qu'en quarrant chaque membre, & ordonnant ensuite l'équation, l'on trouvera y^4, &c. qui doit avoir deux racines égales lorsque y exprime la cherchée PM.

$$\begin{array}{llllll} y^4 & * & -2asyy & +2aaty & +aass & =o. \\ & & +aa & & -aarr & \\ & & & & +aatt & \\ 4, & 3, & 2, & 1, & o. & \\ \hline 4y^4 & * & -4asyy & +2aaty & * & =o. \\ & & +2aa. & & & \end{array}$$

C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique 4, 3, 2, 1, 0, ce qui donnera $4y^3-4asy+2aay+2aat=o$, dont la résolution fournira pour y la valeur cherchée PM.

Si le point donné C tomboit sur le diametre AB; l'on auroit alors $t=o$, & il faudroit effacer par conséquent tous les termes où t se rencontre, ce qui donneroit $4as-2aa=4yy=4ax$, en mettant pour yy sa valeur ax. D'où l'on tireroit $x=s-\frac{1}{2}a$; c'est-à-dire que si l'on prend CP égale à la moitié du parametre, & qu'ayant tiré l'appliquée PM perpendiculaire sur AB, l'on mene la droite CM, elle sera perpendiculaire sur la courbe AMD. FIG. 152.

COROLLAIRE.

FIG. 152. 202. Si l'on veut à présent que le point M soit donné, & que le point C soit celui qu'on cherche ; il faudra dans la derniere équation qui exprime la valeur de AC (s) par rapport à AP (x) ou PM (y) regarder ces dernieres comme connues, & l'autre comme l'inconnue.

DÉFINITION II.

Si d'un rayon quelconque de la dévelopée l'on décrit un cercle, il sera nommé *cercle baisant.*

Le point où ce cercle touche ou baise la courbe, est appellé *point baisant.*

PROPOSITION V.

Problême.

FIG. 153. 203. *La nature de la courbe* AMD *étant donnée avec un de ses points quelconques* M ; *trouver le centre* C *du cercle qui la baise en ce point* M.

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK sur l'axe, & nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le Problême précédent ; l'on arrivera à la même équation dans laquelle il faut observer que la lettre x ou y, que l'on y regarde comme l'inconnue, marque ici une grandeur donnée ; & qu'au contraire s, t, que l'on y regarde comme connues, sont en effet ici les inconnues aussi-bien que r.

Cela posé, il est clair 1°. Que le point cherché C sera situé sur la perpendiculaire MG à la courbe. 2°. Que l'on pourra toujours décrire un cercle qui touchera la courbe en M, & la coupera au moins en deux points (dont je suppose que le plus proche est D, d'où l'on abaissera la perpendiculaire DB) ; puisque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe une ligne courbe quelconque, autre qu'un cercle, au moins en quatre points, & que le point touchant M n'équivaut qu'à deux intersections. 3°. Que plus son centre G ap- FIG. 152.

proche du point cherché C, plus aussi le point d'intersection D approche du point touchant M: de sorte que le point G tombant sur le point C, le point D se réunit avec le point M; puisque * le cercle décrit du rayon CM, doit toucher & couper la courbe au même point M. D'où l'on voit que s exprimant AF, & t, FG, l'équation doit avoir deux racines égales, savoir * chacune à AP ou PM selon qu'on a fait évanouir y ou x, & une autre AB ou BD qui devient aussi égale à AP ou PM lorsque s & t expriment les cherchées AK, KC; & qu'ainsi cette équation doit avoir trois racines égales.

* Art. 76.

* Art. 200.

EXEMPLE.

204. Soit $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, & l'on trouvera * y^4, &c. qui étant multipliée par 8, 3, 0, — 1, 0, produit des deux progressions arithmétiques 4, 3, 2, 1, 0, & 2, 1, 0, — 1, — 2 donne $8y^4 = 2aaty$.

* Art. 201.

$$\begin{array}{lllll} y^4 & * - 2asyy & + 2aaty & + aass & = o. \\ & + aa & & - aarr & \\ & & & + aatt & \\ 4, & 3, & 2, & 1, & o. \\ 2, & 1, & o, & -1, & -2. \\ \hline 8y^4 & * & * & -2aaty & * = o. \end{array}$$

D'où l'on tire la cherchée KC ou $PE\,(t) = \frac{4y^3}{aa}$.

Si l'on veut avoir une équation qui exprime la nature de la courbe qui passe par tous les points C, l'on multiplera encore y^4, &c. par 0, 3, 4, 3, 0, produit des deux progressions 4, 3, 2, 1, 0, & 0, 1, 2, 3, 4; & l'on trouvera $8asy - 4aay = 6aat$: d'où, en supposant pour abréger $s - \frac{1}{2}a = u$, l'on tirera $y = \frac{3at}{4u}$, & $4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3} = aat$; & partant $16u^3 = 27att$. D'où il suit que la courbe qui passe par tous les points C, est une seconde parabole cubique, dont le para-

metre $= \frac{27a}{16}$, & dont le sommet est éloigné de celui de la parabole proposée de $\frac{1}{2}a$; parceque $u = s - \frac{1}{2}a$.

Lorsque la position des parties de la courbe, voisines du point donné M, est entiérement semblable de part & d'autre de ce point, comme il arrive lorsque la courbure y est la plus grande ou la moindre; il s'ensuit que l'une des intersections du cercle touchant ne peut se réunir avec le point touchant, que l'autre ne s'y réunisse en même temps : de sorte que l'équation doit avoir alors quatre racines égales. Et en effet si l'on multiplie y^4, &c. par 24, 6, 0, 0, 0, produit des trois progressions arithmétiques 4, 3, 2, 1, 0, & 3, 2, 1, 0, −1, & 2, 1, 0, −1, −2; l'on aura $24y^4 = 0$: ce qui fait voir que le point M doit tomber sur le sommet A de la parabole, afin que la position des parties voisines de la courbe soit semblable de part & d'autre.

AUTRE SOLUTION.

FIG. 154. 205. On peut encore résoudre ce Problême en se souvenant que l'on a démontré dans l'article 76 qu'on ne peut mener du point cherché C qu'une seule perpendiculaire CM à la courbe AMD; au lieu qu'il y a une infinité d'autres points G sur cette perpendiculaire MC, d'où l'on peut mener deux perpendiculaires MG, GD à la courbe. Si donc on suppose que le point G soit donné, & que l'on cherche* la valeur de x ou y par rapport aux données s & t; il est visible que cette équation doit avoir deux racines inégales, savoir AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales entre elles lorsque le point G tombe sur le point cherché C. C'est pourquoi l'on multipliera cette équation par une progression arithmétique quelconque, &c.

* Art. 200.

EXEMPLE.

206. Soit comme ci-dessus $ax = yy$; & l'on aura* $4y^3$, &c.

* Art. 101.

$$\begin{array}{llll} 4y^3 & * & -4asy & +2aat=0. \\ & & +2aa & \\ 2, & 1 & 0, & -1. \\ \hline 8y^3 & * & * & -2aat=0. \end{array}$$

qui étant multipliée par la progression arithmétique 2, 1, 0, — 1, donne comme * auparavant $t = \frac{4y^3}{aa}$. * Art. 204.

COROLLAIRE.

207. Il est évident qu'on peut considérer le point baisant Fig. 153. 154.
comme * la réunion d'un point touchant avec un point d'in- * Art. 203.
tersection du même cercle ; ou bien comme * la réunion de * Art. 205.
deux points touchants de deux cercles differents & concentriques : de même que le point d'inflexion peut être regardé * * Art. 196.
comme la réunion d'un point touchant avec un point d'intersection de la même droite, ou * comme la réunion de * Art. 198.
deux points touchants de deux differentes droites qui partent d'un même point.

PROPOSITION VI.

Problême.

208. *Trouver une équation qui exprime la nature de la caustique* AFGK, *formée dans le quart de cercle* CAMNB, *par les rayons réfléchis* MH, NL, *&c. dont les incidents* PM, QN, *&c. sont paralleles à* CB. Fig. 155.

Je remarque 1°. Que si l'on prolonge les rayons réfléchis *MF*, *NG*, qui touchent la caustique en *F*, *G*, jusqu'à ce qu'ils rencontrent le rayon *CB* aux points *H*, *L* ; l'on aura *MH* égale à *CH*, & *NL* égale à *CL*. Car l'angle *CMH* = *CMP* = *MCH* ; & de même l'angle *CNL* = *CNQ* = *NCL*.

2°. Que d'un point donné *F* sur la caustique *AFK*, l'on ne peut mener qu'une seule droite *MH* qui soit égale à

CH, au lieu que d'un point donné D entre le quart de cercle AMB & la caustique AFK, l'on peut mener deux lignes MH, NL telles que $MH = CH$ & $NL = CL$. Car on ne peut mener du point F qu'une seule tangente MH; au lieu que du point D on en peut mener deux MH, NL. Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener d'un point donné D la droite MH, ensorte qu'elle soit égale à la partie CH, qu'elle détermine sur le rayon CB.

Ayant mené MP, DO paralleles à CB, & MS parallele à CA, soient nommées les données CO, ou RS, u; OD, z; AC ou CB, a; & les inconnues CP où MS, x; PM ou CS, y; CH ou MH, r. Le triangle rectangle MSH donnera $rr = rr - 2ry + yy + xx$; d'où l'on tire $CH(r) = \frac{xx+yy}{2y}$. De plus les triangles semblables MRD, MSH donneront $MR(x-u) . MS(x) :: RD(z-y) . SH = \frac{zx-xy}{x-u}$, & partant $CS + SH$ ou $CH = \frac{zx-uy}{x-u} = \frac{xx+yy}{2y} = \frac{aa}{2y}$ en mettant pour $xx+yy$ sa valeur aa. D'où l'on forme (en multipliant en croix) l'équation $aax - aau = 2zxy - 2uyy$; & mettant pour yy sa valeur $aa - xx$, il vient $2zxy = aax + aau - 2uxx$: quarrant ensuite chaque membre pour ôter les incommensurables, & mettant encore pour yy sa valeur $aa - xx$, l'on aura enfin

$$\begin{array}{llll} 4uux^4 - 4aaux^3 & - 4aauuxx & + 2a^4ux & + a^4uu = 0. \\ 4zz & - 4aazz & & \\ & + a^4 & & \end{array}$$

Or il est clair que u exprimant CO; & z, OD; cette égalité doit avoir deux racines inégales, savoir CP, CQ: & qu'au contraire u exprimant CE; & z, EF; CQ devient égale à CP, de sorte qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi si l'on multiplie ses termes par ceux des deux progressions arithmétiques 4, 3, 2, 1, 0, & 0, 1, 2, 3, 4, l'on formera deux égalités nouvelles par le moyen desquelles

on trouvera, après avoir fait évanouir l'inconnue x, cette équation

$$
\begin{aligned}
&64z^6 - 48aaz^4 + 12a^4zz - a^6 = 0.\\
&+ 192uu - 96aauu - 15a^4uu\\
&+ 192u^4 - 48aau^4\\
&+ 64u^6
\end{aligned}
$$

qui exprime la relation de la coupée CE (u) à l'appliquée EF (z). Ce qu'il falloit trouver.

On peut déterminer le point touchant F en se servant de la Méthode expliquée dans la huitieme Section. Car si l'on imagine un autre rayon incident pm infiniment proche de PM; il est clair que le réfléchis mh coupera MH au point cherché F, par lequel ayant tiré FE parallele à PM, l'on nommera CE, u; EF, z; CP, x; PM, y; CM, a: & l'on trouvera comme ci-dessus $\frac{aax + aau - 2uxx}{xy} = 2z$. Or il est visible que CM, CE, EF demeurent les mêmes pendant que CP & PM varient. C'est pourquoi l'on prendra la différence de cette équation en traitant a, u, z, comme constantes, & x, y comme variables; ce qui donnera $2uyxxdx + aauydx - aaxxdy - aauxdy + 2ux^3dy = 0$, dans laquelle mettant pour dx sa valeur $-\frac{ydy}{x}$ (que l'on trouve en prenant la différence de $yy = aa - xx$), & ensuite pour yy sa valeur $aa - xx$, il vient enfin CE (u) $= \frac{x^3}{aa}$.

Si l'on suppose que la courbe AMB ne soit plus un quart de cercle, mais une autre courbe quelconque qui ait pour rayon de sa développée au point M la droite MC; il est clair * que sa petite portion Mm peut être regardée comme un arc de cercle décrit du centre C. D'où il suit que si l'on mene par ce centre la perpendiculaire CP sur le rayon incident PM, & qu'ayant pris $CE = \frac{x^3}{aa}$ ($CP = x$, $CM = a$), l'on tire EF parallele à PM; elle ira couper le rayon réfléchi MH au point F, où il touche la caustique AFK.

* *Art.* 76.

Si l'on tire par tous les points M, m d'une ligne courbe quelconque AMB, des lignes droites MC, mC à un point fixe C de son axe AC, & d'autres droites MH, mh terminées par la perpendiculaire CB à l'axe, ensorte que l'angle $CMH = MCH$ & $Cmh = mCh$; & qu'il faille trouver sur chaque MH le point F où elle touche la courbe AFK, formée par les intersections continuelles de ces droites MH, mh. On trouvera comme auparavant $CH = \frac{xx+yy}{2y} = \frac{zx-uy}{x-u}$: d'où l'on tire $\frac{x^3+uyy+xyy-uxx}{xy} = 2z$, dont la différence (en traitant u, z comme constantes, & x, y comme variables) donne $2x^3ydx - uxxydx - x^4dy + ux^3dy + xxyydy + uxyydy - uy^3dx = 0$; & partant la cherchée $CE\ (u) = \frac{2x^3ydx - x^4dy + xxyydy}{xxydx - x^3dy + y^3dx - xyydy}$. Or la nature de la ligne AMB étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx, laquelle étant substituée dans l'expression de CE, cette expression sera délivrée des différences & entiérement connue.

PROPOSITION VII.

Problême.

FIG. 156. 209. *Soit une ligne droite indéfinie* AO *qui ait un commencement fixe au point* A; *soit entendue une infinité de paraboles* BFD, CDG *qui aient pour axe commun la droite* AO, *& pour parametres les droites* AB, AC *interceptées entre le point fixe* A, *& leurs sommets* B, C. *On demande la nature de la ligne* AFG *qui touche toutes ces paraboles.*

Je remarque d'abord que deux quelconques de ces paraboles BFD, CDG se couperont en un point D situé entre la ligne AFG & l'axe AO, que AC devenant égal à AB, le point d'intersection D tombe sur le point touchant F. Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener par le point donné D une parabole qui ait la propriété marquée. Si l'on mene l'appliquée DO,

DO, & qu'on nomme les données AO, u; OD, z; & l'inconnue AB, x; la propriété de la parabole donnera $AB \times BO\ (ux - xx) = \overline{DO}^2\ (zz)$; & ordonnant l'égalité, l'on aura $xx - ux + zz = o$. Or il est évident que u exprimant AO; & z, OD; cette égalité a deux racines inégales, savoir AB, CA; & qu'au contraire u exprimant AE; & z, EF; AC devient égale à AB, c'est-à dire qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithméthique 1, 0, $-$ 1, ce qui donne $x = z$; & substituant cette valeur à la place de x, il vient l'équation $u = 2z$ qui doit exprimer la nature de la ligne AFG. D'où l'on voit que AFG est une ligne droite faisant avec AO l'angle FAO tel que AE est double de EF.

Si l'on veut résoudre cette question en général, de quelque degré que puissent être les paraboles BFD, CDG; on se servira de la Méthode expliquée dans la Section huitieme, en cette sorte. Nommant AE, u; EF, z; AB, x; l'on aura $\overline{u - x}^m \times x^n = z^{m+n}$ qui exprime en général la nature de la parabole BF, dont la différence donne (en traitant u & z comme constantes, & x comme variable) $- m \times \overline{u - x}^{m-1}\, dx \times x^n + nx^{n-1}\, dx \times \overline{u - x}^m = o$; & divisant par $\overline{u - x}^{m-1}\, dx \times x^{n-1}$, il vient $- mx + nu - nx = o$: d'où l'on tire $x = \frac{n}{m+n} u$; & partant $u - x = \frac{m}{m+n} u$. Mettant donc ces valeurs à la place de $u - x$, & de x dans l'équation générale; & faisant (pour abréger) $\frac{m}{m+n} = p$, $\frac{n}{m+n} = q$, $m + n = r$, l'on aura $z = u \sqrt[r]{p^m q^n}$. D'où l'on voit que la ligne AFG est toujours droite, si composées que puissent être les paraboles, n'y ayant que la raison de AE à EF qui change.

On voit clairement par ce que l'on vient d'expliquer dans cette Section, de quelle maniere l'on doit se servir de la Mé-

thode de MM. Descartes & Hudde *pour résoudre ces sortes de questions lorsque les courbes sont géométriques. Mais l'on voit aussi en même temps qu'elle n'est pas comparable à celle de M.* Leibnitz, *que j'ai taché d'expliquer à fond dans ce Traité : puisque cette derniere donne des résolutions générales où l'autre n'en fournit que de particulieres, qu'elle s'étend aux lignes transcendantes, & qu'il n'est point nécessaire d'ôter les incommensurables ; ce qui seroit très souvent impraticable.*

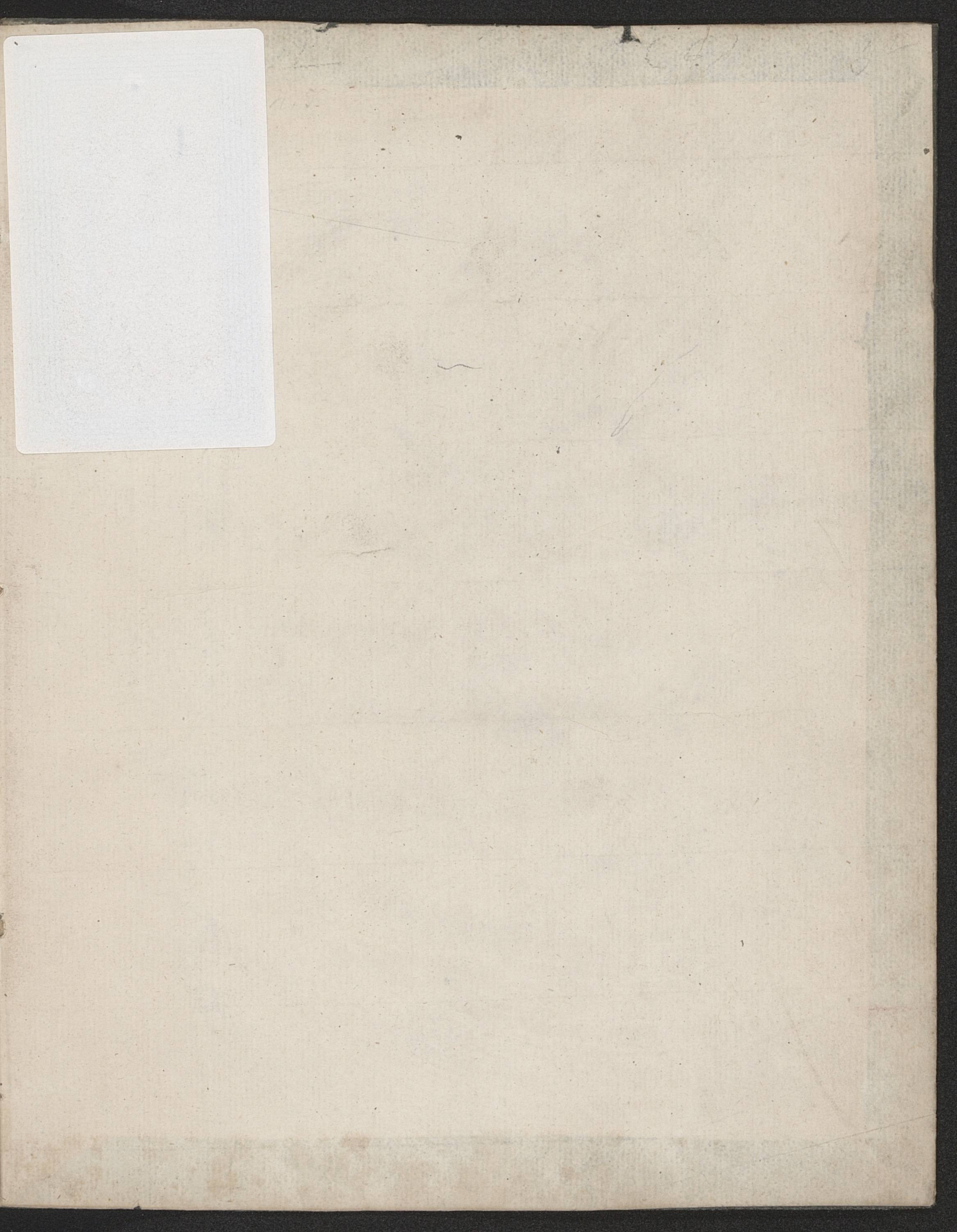
FIN.

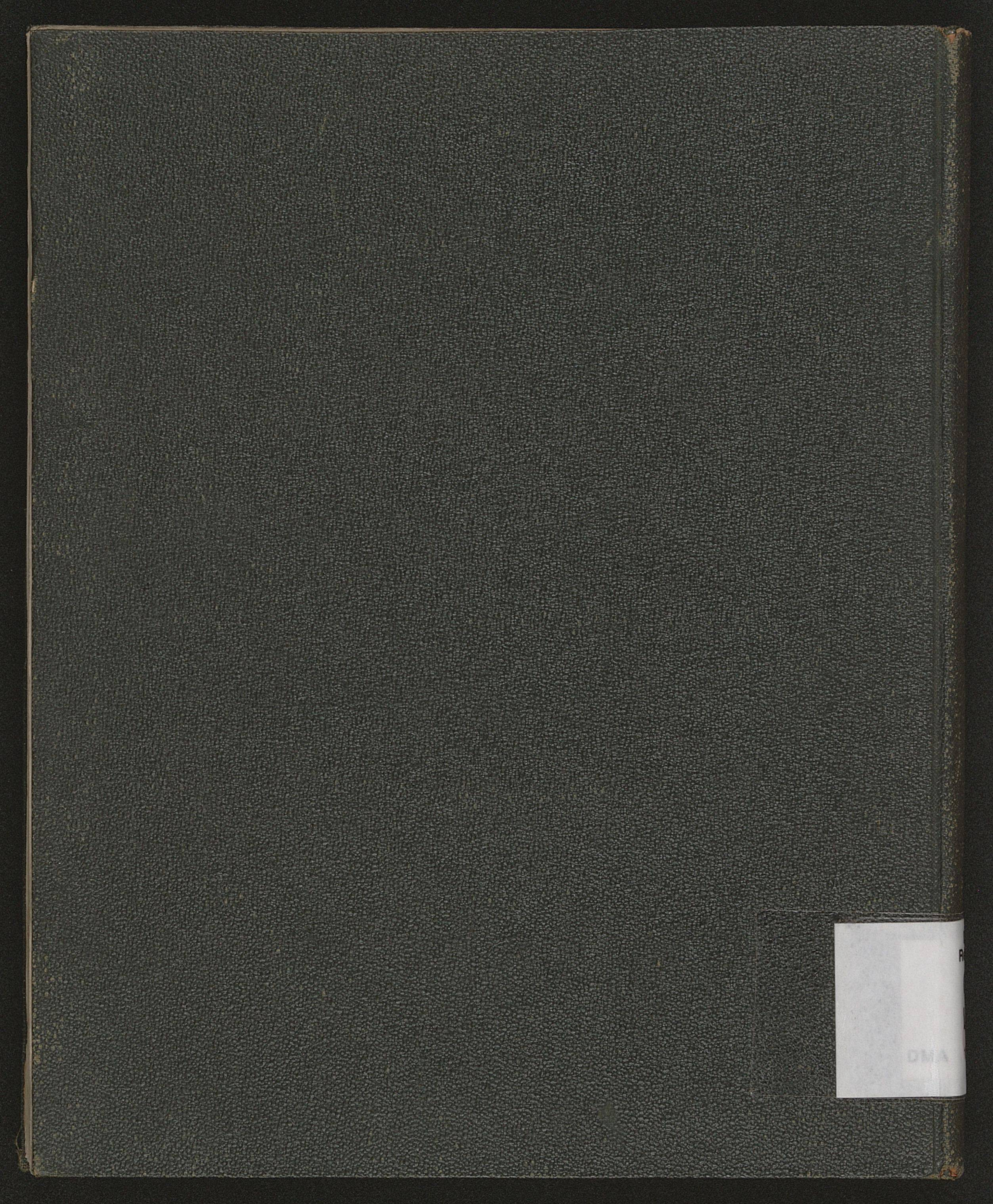
DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT L'AINÉ,
Imprimeur du Clergé, en survivance.

thode de MM. Descartes & Hudde *pour résoudre ces sortes de questions lorsque les courbes sont géométriques. Mais l'on verra aussi en même temps qu'elle n'est pas comparable à celle de M.* Leibnitz, *que j'ai tâché d'expliquer à fond dans ce Traité; puisque cette derniere donne des résolutions générales où l'autre n'en fournit que de particulieres, qu'elle s'étend aux lignes transcendantes, & qu'il n'est point nécessaire d'ôter les incommensurables; ce qui seroit très souvent impossible.*

FIN.

DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT L'AÎNÉ,
Imprimeur du Clergé, au Parnasse.







inches

centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87	L*
	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17	a*
	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46	b*
	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42										

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams